1934 1 МАРТА — 1 MARS № 7

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

IMPERIAL MYCOLOGICAL INSTITUTE 12 APR. 1934

COMPTES RENDUS
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

НОВАЯ СЕРИЯ — NOUVELLE SÉRIE

Том I — Volume I

ОГЛАВЛЕНИЕ — SOMMAIRE

	стр.
Акад. С. Н. Бернштейн. II. О линейных квазинепрерывных цепях Маркова	361
Акад. И. М. Виноградов. Новые теоремы о распределении первообразных корней	366
С. Г. Михлин. Задача Дирихле для областей с несколькими замкнутыми границами	370
Д. И. Шерман. Об одной методе решения статической задачи теории упругости о напряжениях для плоских многосвязных областей	376
А. И. Попов. Замечание к работе В. А. Фока „Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung"	380
В. В. Павский. Об одном общем выражении для доживаемости в условиях смертности данного календарного промежутка	381
М. П. Бронштейн. К вопросу о релятивистском обобщении принципа неопределенности	388

	pag.
S. Bernstein, de l'Académie. II. Sur les chaînes linéaires de Markov quasi-continues	365
I. Vinogradow, Member of the Academy. On the Distribution of Primitive Roots	369
S. Michlin. Dirichlet's Problem for a Domain with Several Closed Boundaries	373
D. Serman. Un problème de théorie de l'élasticité pour les domaines multiplement connexes	379
A. Popov. Bemerkung zur Arbeit von V. Fock „Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung	381
V. Pajevskij. On a Certain Expression for the probability of Survivorship	385
M. Bronstein. Zur relativistischen Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzipes	390

(См. на обороте)

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD

(Продолжение)

	стр.
Ю. А. Крутков. К теории броуновского движения. О функции распределения $f(v, x, t)$ и об уравнении диффузии	393
В. Д. Кузнецов, Д. В. Конвисаров и В. И. Строкопытов. Повышение пластичности металлов при знакопеременном пластическом кручении	399
К. К. Андреев и Ю. Б. Харитон. Некоторые соображения о механизме самораспространяющихся реакций	402
М. М. Кацнельсон и М. И. Кабачник. Амидирование с помощью натрий- и калий-амида в ряду алкалоидов I. Об α-аминоанабазине	406
В. С. Садиков, В. А. Вадова и Р. Г. Кристаллинская. Применение серной, соляной, фосфорной и азотной кислот и щелочей при каталитическом расщеплении белков	411
Я. Ф. Лященко. О цветении рода *Cucurbita*	416
Н. И. Калабухов. „Анабиоз" у позвоночных и насекомых при температуре ниже 0°	419
Л. А. Варданянц. О возрасте рельефа Предкавказья	427

	PAG.
O. Krutkow. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Über die Verteilungsfunktion $f(v, x, t)$ und die Diffusionsgleichung	396
V. Kuznecov, D. Konvisarov und V. Strokopytov. Steigerung der Plastizität von Metallen bei plastischer Drehung mit Zeichenänderung	400
K. Andrejev and J. Chariton. Some Considerations on the Mechanism of Self-Propagating Reactions	404
M. Kacnelson und M. Kabačnik. Amidierung mit Hilfe von Natrium- und Kaliumamid in der Reihe der Alkaloide I. Über das α-Aminoanabasin	409
V. Sadikov (Ssadikow), V. Vadova und R. Kristallinskaja. Anwendung von H_2SO_4, HCl, H_3PO_4, HNO_3 und von Alkalien zur katalytischen Spaltung der Eiweisskörper	415
I. Liaščenko. Über die eigenartige Blütenformbildung bei einigen Arten der Gattung *Cucurbita*	417
N. Kalabuchov. Anabiosis in Vertebrates and Insects at a Temperature below zero	424
L. Vardanianc. On the Age of the Relief of the Ciscaucasia	429

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В „Докладах" помещаются предварительные сообщения или статьи-конспекты научных работников СССР, содержащие в краткой форме наиболее существенные результаты их работы в области математики, естествознания и теоретической техники.

2. Объем статьи не должен превышать 10 000 печ. знаков.

3. Статьи направляются для напечатания в „Докладах" или непосредственно в редакцию, или через действительных членов Академии Наук.

4. Статьи принимаются для напечатания по отзыву членов Редакционной коллегии или действительных членов Академии Наук по специальности.

5. Каждая статья печатается на русском и на одном из иностранных языков, французском, английском или немецком. Автор должен представить вместе с русским текстом статьи ее перевод или резюме на одном из указанных иностранных языков.

6. Объем перевода не должен превышать 10 000 печ. знаков, резюме — не более 3 000 печ. знаков.

7. Цитируемая литература должна быть автором указываема не в подстрочных примечаниях, а в конце статьи общим списком с обозначением в тексте статьи порядковой цифрой ссылки на цитируемую работу.

8. В конце статьи автором должно быть обозначено на русском и иностранном языках название и местонахождение научного учреждения, в котором произведена работа.

9. Иллюстрации в „Докладах" помещаются лишь в исключительных случаях.

10. Статьи должны быть доставляемы в совершенно готовом к печати виде (переписанными на машинке на одной стороне листа, через два перекатa).

11. В виду срочности издания корректуры статей авторам не посылаются.

12. Автор получает бесплатно 50 отдельных оттисков своей статьи.

Редакционная Коллегия просит действительных членов Академии Наук при направлении статей в „Доклады" для напечатания указывать на статьях дату их получения от авторов.

Доклады Академии Наук СССР 1934
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

С. Н. БЕРНШТЕЙН

II. О ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫХ ЦЕПЯХ МАРКОВА*

1. Укажем в качестве примера физическую интерпретацию уравнения:

$$\Delta\frac{\Delta z}{\Delta t}=P\Delta z+\alpha,\ (P<0),\ E(\alpha)=0,\ E(\alpha^2)=\sigma^2\Delta t. \qquad [17\text{ bis}]$$

Пусть (z_1, z_2, z_3) будут координаты центра тяжести одной из молекул некоторой изолированной газообразной массы. Не зная никаких специальных гипотез о природе или форме молекулы (неизменной массы), необходимо лишь принять, что математическое ожидание каждой составляющей скорости молекулы равно нулю при макроскопическом равновесии. Кроме того, какова бы ни была природа взаимодействий между молекулами, естественно допустить, что если соответствующая $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ для данной молекулы имеет определенный знак, то воздействие окружающих молекул стремится, в среднем, дать ей приращение противоположного знака, так что математическое ожидание этого приращения равно при Δt достаточно малом:

$$E\Delta\frac{\Delta z}{\Delta t}=P\frac{\Delta z}{\Delta t}\Delta t, \qquad [25]$$

где коэффициент $P<0$. Таким образом, мы приходим к уравнению [17 bis], где $Ex=0$.

Следовательно, согласно результатам моего первого сообщения, мы находим, что $y=z=\lim\frac{\Delta z}{\Delta t}$, т. е. каждая составляющая мгновенной скорости молекулы соответствующая данной начальной скорости $y=y_0$ подчиняется нормальному закону вероятностей (закон Maxwell'a) с параметрами

$$M=y_0e^{Pt}\to 0,\ B=\frac{\sigma^2}{2P}(e^{2Pt}-1)\to-\frac{\sigma^2}{2P} \qquad [26]$$

(при $t\to\infty$), где $\sigma^2\Delta t$ — дисперсия (т. е. средний квадрат) приращения y' в течение бесконечно малого промежутка времени t. С другой стороны, дисперсия D проекции z пути молекулы, которая также подчиняется нормальному закону (закон диффузии), равна**

$$D=\frac{\sigma^2}{P^2}\left[t+\frac{1}{2P}(3-4e^{Pt}+e^{2Pt})\right]\to\frac{\sigma^2}{P^2}t. \qquad [23\text{ bis}]$$

Коэффициент P, как и σ, обратно пропорциональны массе m молекулы. Поэтому $\lim D$ не зависит от m, между тем как $\lim B$ обратно пропорционально m. Можно заметить, что предельная формула [3] выражает

* ДАН, 1934, № 1, стр. 1.
** Коэффициент корреляции между z и z' стремится к нулю с возрастанием t.

в соответствии с теоремой живых сил, что, при установившемся режиме ($t=\infty$), математическое ожидание живой силы

$$Em\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 = -m\frac{\sigma^2}{2P}$$

сохраняет постоянное значение (независимое от массы m молекулы), так как

$$E\Delta\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 = E\left[2\frac{\Delta z}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta^2 z}{\Delta t}+\left(\frac{\Delta_2 z}{\Delta t}\right)^2\right]\sim E\left[2P\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2+\sigma^2\right]=$$
$$=2PB+\sigma^2-y_0^2e^{2Pt}\to 0.$$

2. Возвращаясь к общим формулам [19] для B, C, D, видим, что B, C, D выражаются сходящимися рядами

$$B=t+Pt^2+\frac{2P^2+k}{3}t^3+\cdots,\quad \frac{C}{\sigma^2}=\frac{t^2}{2}+\frac{Pt^3}{2}+\cdots,\quad \frac{D}{\sigma^2}=\frac{t^3}{3}+\frac{Pt^4}{4}+\cdots$$

Следовательно (полагая $z=z_0$, $y=y_0$ данными в первоначальный момент), коэффициент корреляции R между (z, y) равен:

$$R=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{Pt}{8}+\cdots\right), \qquad [26]$$

т. е. для достаточно малых значений t, имеем, при любых P и k, приближенное равенство:

$$R\doteq\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad [27]$$

(вполне точное при $P=k=0$).

Другими словами, для малых значений Δt, вероятность неравенства

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}-y_0\right|<H\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{3}}$$

весьма мало отличается от

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^H e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

т. е. для H достаточно большого, сколь угодно близка к единице. В этом смысле и следует понимать утверждение, что y является стохастической производной или стохастической скоростью величины z, но, очевидно, в противоположность классическому определению производной, нельзя указать такого значения t, чтобы неравенство $\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}-y_0\right|<\varepsilon$ при данном ε, было несомненно.

3. Займемся теперь вычислением коэффициентов корреляции между последовательными значениями переменных при $t=t_0$, $t=t_1$, где $t_0<t_1$. Для этого заметим, что так как $\frac{C(t)}{D(t)}$ есть коэффициент регрессии $z'=y$ относительно z, то линия регрессии $z_1=z(t_1)$ относительно $z_0=z(t_0)$, т. е. $E_{z_0}(z_1)$ математическое ожидание z, при данном z_0, имеет уравнением:

$$E_{z_0}(z_1)=a_1+\frac{z_0-a_0}{\xi_2-\xi_1}\left[\left(\xi_2-\frac{C(t_0)}{D(t_0)}\right)e^{\xi_1(t_1-t_0)}+\left(\frac{C(t_0)}{D(t_0)}-\xi_1\right)e^{\xi_2(t_1-t_0)}\right], \qquad [28]$$

где $a_0 = E(z_0)$, $a_1 = E(z_1)$. Поэтому, коэффициент корреляции $R_0(z_0, z_1)$ между z_0 и z_1 равняется:

$$R_0(z_0, z_1) = \frac{(\xi_2 D_0 - C_0)\, e^{\xi_1(t_1-t_0)} + (C_0 - \xi_1 D_0)\, e^{\xi_2(t_1-t_0)}}{(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{D_0 D_1}}, \qquad [29]$$

где мы пишем для краткости $C_0, \ldots D_1$ и т. д. вместо $C(t_0), \ldots D(t_1)$.

Аналогичным образом получаются остальные 3 коэффициентные корреляции:

$$R_1(z_0, z_1') = \frac{-(\xi_1 C_0 + kD_0)\, e^{\xi_1(t_1-t_0)} + (kD_0 + \xi_2 C_0)\, e^{\xi_2(t_1-t_0)}}{(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{D_0 B_1}},$$

$$R_2(z_0', z_1) = \frac{(\xi_2 C_0 - B_0)\, e^{\xi_1(t_1-t_0)} (B_0 - \xi_2 C_0)\, e^{\xi_2(t_1-t_0)}}{(\xi_2 - \xi_1)\sqrt{B_0 D_1}}, \qquad [29\text{ bis}]$$

$$R_3(z_0', z_1') = -(kC_0 + \xi_1 B_0)\, e^{\xi_1(t_1-t_0)} + (kC_0 + \xi_2 B_0)\, e^{\xi_2(t_1-t_0)}.$$

Очевидно, при

$$t_1 \to t_0,\ R_0 = R_3 = 1,\ \frac{\partial R_0}{\partial t_1} = \frac{\partial R_0}{\partial t_0} = 0,\ R_1 = R_2 = \frac{C_0}{\sqrt{B_0 D_0}}.$$

Укажем, в частности, формулы, соответствующие предельным случаям:

1) $k = 0$, $(\xi_1 = 0,\ \xi_2 = P)$

$$R_0(z_0, z_1) = \frac{PD_0 + C_0(1 - e^{P(t_1-t_0)})}{P\sqrt{D_0 D_1}}, \qquad R_1(z_0, z_1') = \frac{C_0}{\sqrt{D_0 B_1}}\, e^{P(t_1-t_0)},$$

$$R_2(z_0', z_1) = \frac{C_0}{\sqrt{B_0 D_1}} + \frac{1}{P}\sqrt{\frac{B_0}{D_1}}\left(e^{P(t_1-t_0)} - 1\right),\ R_3(z_0', z_1') = \sqrt{\frac{B_0}{B_1}}\, e^{P(t_1-t_0)};$$

2) $P^2 + 4k = 0$ $\left(\xi_1 = \xi_2 = \frac{P}{2}\right)$

$$R_0(z_0, z_1) = \frac{2D_0 + (t_1 - t_0)(2C_0 - PD_0)}{2\sqrt{D_0 D_1}}\, e^{\frac{P}{2}(t_1-t_0)},$$

$$R_2(z_0', z_1) = \frac{2C_0 + (2B_0 - PC_0)(t_1 - t_0)}{2\sqrt{B_0 D_1}}\, e^{\frac{P}{2}(t_1-t_0)},$$

$$R_1(z_0, z_1') = \frac{2C_0 + P\left(C_0 - \frac{1}{2}PD_0\right)}{2\sqrt{D_0 B_1}}\, e^{\frac{P}{2}(t_1-t_0)}, \qquad [30]$$

$$R_3(z_0', z_1') = \frac{2B_0 + P\left(B_0 - \frac{1}{2}PC_0\right)(t_1 - t_0)}{2\sqrt{B_0 B_1}}\, e^{\frac{P}{2}(t_1-t_0)};$$

3) $P = k = 0$

$$R_0(z_0, z_1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_0}{t_1}}\left(3 - \frac{t_0}{t_1}\right),\ R_1(z_0, z_1') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3t_0}{t_1}},$$

$$R_2(z_0', z_1) = \sqrt{\frac{3t_0}{t_1}}\left(1 - \frac{t_0}{2t_1}\right),\ R_3(z_0', z_1') = \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}.$$

Наконец, при стационарном режиме ($P<0$ $k=-L^2$), имеем:

$$R_0(z_0, z_1)=\frac{\xi_2 e^{\xi_1(t_1-t_0)}-\xi_1 e^{\xi_2(t_1-t_0)}}{\xi_2-\xi_1}=\frac{e^{P\frac{t_1-t_0}{2}}}{h}\left(h\cos h\frac{t_1-t_0}{2}\,P\sin h\frac{t_1-t_0}{2}\right);$$

$$R_2'(z_0', z_1)=-R_1(z_0, z_1')=\frac{L}{\xi_1-\xi_2}\left(e^{\xi_1(t_1-t_0)}-e^{\xi_2(t_1-t_0)}\right)=$$

$$=\sqrt{1+\frac{P^2}{h^2}}\,e^{P\frac{t_1-t_0}{2}}\sin h\frac{t_1-t_0}{2}; \qquad [31]$$

$$R_3(z_0', z_1')=\frac{\xi_1 e^{\xi_1(t_1-t_0)}-\xi_2 e^{\xi_2(t_1-t_0)}}{\xi_1-\xi_2}=\frac{e^{P\frac{(t_1-t_0)}{2}}}{h}\left(h\cos h\frac{t_1-t_0}{2}+P\sin h\frac{t_1-t_0}{2}\right),$$

где первые значения соответствуют случаю вещественных корней $\xi=\frac{1}{2}(P\pm\sqrt{P^2-4L^2}$, а вторые значения соответствуют случаю комплексных корней $\xi=\frac{1}{2}\ (P\pm iL)$. В первом случае имеем всегда $R_0(z_0,\ z_1)>0$, $R_2(z_0',\ z_1)>0$, напротив $-R_1(z_0,\ z_1')<0$; между тем, $R_3(z_0', z_1')$, уменьшаясь от $+1$ (при $t_1=t_0$), становится отрицательным при $t_1-t_0\geqslant\frac{\log\rho}{\xi_1-\xi_2}$, где $\rho=\frac{\xi_2}{\xi_1}<1$ и достигает отрицательного минимума*

$$m=-\rho^{\frac{1+\rho}{1-\rho}}$$

при $t_1-t_0=\frac{2\log\rho}{\xi_1-\xi_2}$, стремясь к 0 (подобно прочим коэффициентам корреляции) при $t_1\to\infty$. В случае комплексных корней последовательные значения z, соответствующие промежуткам времени $\frac{2\pi}{h}$, образуют простую цепь (так как $R_2=R_1=0$).

Поправка. В предыдущую мою статью „О линейных квази-непрерывных цепях Маркова", (ДАН, № 1, 1934) вкрались опечатки: на странице 3 в строке 10 вместо 0 следует ∞; в строке 4 снизу — вместо $\Sigma yi\Delta t$ следует $\Sigma y_i\,\Delta t$; на странице 4 в строке 21 в формуле [3] вместо u^u следует u^n; на странице 8 в строке 2 вместо $\frac{\sigma^2}{P}$ следует $-\frac{\sigma^2}{2P}$; в строке 3 вместо $\left[e^{\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}-e^{-\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}\right]$ следует $\left[e^{\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}-e^{-\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}\right]^2$; в строке 5 вместо 0 следует ∞; в строке 14 вместо $\left(e^{t\sqrt{k}}-e^{-t\sqrt{k}}\right)$ следует $\left(e^{t\sqrt{k}}-e^{-t\sqrt{k}}\right)^2$; на странице 9 в строке 6 снизу вместо $\Sigma yi\Delta t$ следует $\Sigma y_i\,\Delta t$.

Поступило
3 II 1933.

---

* Как легко видеть, абсолютное значение m растет вместе с ρ, достигая значения e^{-2} когда $\rho\to1$.

II. SUR LES CHAÎNES LINÉAIRES DE MARKOV QUASI-CONTINUES*

Par S. BERNSTEIN

RÉSUMÉ

1. Considérons l'interprétation physique de l'équation (17 bis). Soient z_1, z_2, z_3 les coordonnés du centre de gravité d'une molécule donnée d'une masse gazeuse isolée. Sans faire d'hypothèse spéciale sur la forme et la nature des molécules et de leur action mutuelle, il est nécessaire de supposer seulement qu'à priori l'espérance mathématique de chaque composante de la vitesse d'une molécule est nulle à l'état d'équilibre macroscopique et que, de plus, l'espérance mathématique $E\Delta\frac{\Delta z}{\Delta t}$ de l'accroissement de $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, devant être de signe opposé à celui de $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, est donnée par la formule [25] pour de petites valeurs de Δt avec $P<0$. Ainsi, d'après les résultats de ma première communication, on arrive aux formules [26] (loi de Maxwell) et [23 bis] (loi de diffusion). Puisque P et σ sont inversement proportionnels à la masse m de la molécule, il en est de même de B (carré moyen de chaque composante de la vitesse), tandis que D (carré moyen du déplacement) est indépendant de m (pour $t\to 0$).

2. La signification de la vitesse stochastique momentanée $z=y$ est contenue dans l'affirmation résultant des développements précédents que la probabilité de l'inégalité

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta t}-z'\right|<H\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}$$

tend vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^H e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ pour $\Delta t\to 0$, quel que soit $H>0$. Donc, E étant donné, l'inégalité $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ n'est jamais certaine, quelque petit que soit t.

3. Les formules [29] et [29 bis] donnent les expressions générales des coefficients de corrélation $R_0(z_0, z_1)$, $R_1(z_0, z_1')$, $R_2(z_0', z_1)$, $R_3(z_0', z_1')$ entre les valeurs successives de z correspondant à t_0 et t_1 $(t_1>t_0>0)$ dont la première, par exemple, se déduit de la formule [28] qui représente la ligne de régression de z_1 par rapport à z_0; les formules [30] correspondent aux cas limites, les formules [31] correspondent au cas stationnaire.

Errata. Dans ma précédente note „Sur les chaines linéaires de Markov quasi-continues" (v. note ci-dessous) les fautes d'impression suivantes se sont glissées: page 3 ligne 10 au lieu de 0 lire ∞; ibid., l. 4 du bas au lieu de $\Sigma yi\Delta t$ lire $\Sigma y_i\Delta t$ p. 4 l. 21, formule [3] au lieu de u^u lire u^n; p. 8 l. 2 au lieu de $\frac{\sigma^2}{2P}$ lire $\frac{-\sigma^2}{2P}$; ibid., l. 3 au lieu de $\left[\frac{t}{e^2}\sqrt{P^2+4k}-e^{-\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}\right]$ lire $\left[e^{\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}-e^{-\frac{t}{2}\sqrt{P^2+4k}}\right]^2$; ibid., l. 5 au lieu de 0 lire ∞; ibid. l. 14 au lieu de $\left(e^{t\sqrt{k}}-e^{-t\sqrt{k}}\right)$ lire $\left(e^{t\sqrt{k}}-e^{-t\sqrt{k}}\right)^2$; p. 9 l. 6 du bas au lieu de $\Sigma yi\Delta t$ lire $\Sigma y_i\,\Delta t$;.

Manuscrit reçu
le 3. II. 1934.

---

* C. R. de l'Ac. d. Sci. de l'URSS, 1934, 1, p. 4.

И. М. ВИНОГРАДОВ

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРВООБРАЗНЫХ КОРНЕЙ

§ 1. Обозначения. p простое > 7. Сравнения по модулю p пишем без указания модуля. Если ε не делится на p, то ε' определяется сравнением

$$\varepsilon\varepsilon' \equiv 1.$$

Вместо $\alpha\varepsilon'$ иногда пишем $\frac{\alpha}{\varepsilon}$.

$$\rho = e^{\frac{2\pi i}{p-1}}; \quad R_k = e^{\frac{2\pi i}{k}}.$$

Если ε делится на p, то считаем

$$p^{k \operatorname{ind} \varepsilon + n} = 0.$$

ϑ число, модуль которого не превосходит 1.

§ 2. Оценка новой суммы.

1. Пусть k и h по модулю p несравнимы ни с нулем, ни между собою, и ни одно из чисел a, b, c не делится на $p-1$. Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{x=1}^{p-1} \rho^{a \operatorname{ind} x + b \operatorname{ind} (x+h) + c \operatorname{ind} (x+k)}.$$

Имеем:

$$|S|^2 = \sum_{x=1}^{p-1} \sum_{t=1}^{p-1} \rho^{a \operatorname{ind} t + b \operatorname{ind} (tx+h) - b \operatorname{ind} (x+h) + c \operatorname{ind} (tx+k) - c \operatorname{ind} (x+k)}.$$

Полагая $x + h = u'$, имеем:

$$|S|^2 = \sum_{u=1}^{p-1} \sum_{t=1}^{p-1} \rho^{a \operatorname{ind} t + b \operatorname{ind} [t + (h-th)\, u] + c \operatorname{ind} [t + (k-th)\, u] - c \operatorname{ind} [1 + (k-h)\, u]}, \qquad [A]$$

где $u = h'$ исключается.

2. Часть суммы $[A]$, отвечающая $t \equiv 1$, равна $p-3$. Часть, отвечающая $t \equiv kh'$, равна

$$\sum_{u=1}^{p-1} \rho^{a \operatorname{ind} kh' + b \operatorname{ind} [kh' + (k-h)\, u] + c \operatorname{ind} kh' - c \operatorname{ind} [1 + (k-h)\, u]}.$$

Добавляя сюда значения $u \equiv 0$ и $u \equiv h'$, мы получили бы сумму, модуль которой $= \sqrt{p}$. Значит модуль рассматриваемой суммы $\leq \sqrt{p} + 2$.

3. Модуль части суммы $[A]$, отвечающей какому либо значению t, несравнимому ни с одним из чисел 0, 1, kh', можно переписать так:

$$\left| \sum_{u=1}^{p-1} \rho^{b \operatorname{ind} [u + t\,(h-th)'] + c \operatorname{ind} [u + t\,(k-th)'] - c \operatorname{ind} [u + (k-h)']} \right|,$$

где $u \equiv h'$ исключается. Но это приводится к

$$\left| \sum_{w} \rho^{b \operatorname{ind} w + c \operatorname{ind} (w+1) - c \operatorname{ind} (w+s)} \right|; \quad s \equiv -\frac{(kt-h)(ht-k)}{t\,(k-h)^2},$$

где w пробегает числа полной системы вычетов по модулю p, за исключением некоторых двух.

4. Замечая, что последнее сравнение при каждом данном значении s имеет не более двух решений, имеем:

$$|S|^2 \leqq p-1+\sqrt{p}+2\sum_{s=0}^{p-1}\left|\sum_{w}\rho^{b\,\mathrm{ind}\,w+c\,\mathrm{ind}\,(w+1)-c\,\mathrm{ind}\,(w+s)}\right| \leqq p-1+$$

$$+\sqrt{p}+2\sqrt{(p-3)\sum_{w}\sum_{w_1}\left|\sum_{s=0}^{p-1}\rho^{c\,\mathrm{ind}\,\frac{w_1+s}{w+s}}\right|},$$

причем значения

$$s\equiv -w \text{ и } s\equiv w_1$$

исключаются.

5. Если $w_1\equiv w$, то суммирование по s дает $p-2$. Если же w_1 несравнимо с w, то это суммирование дает -1. Поэтому,

$$|S|^2 \leqq p-1+\sqrt{p}+2\sqrt{(p-3)[(p-2)(p-1)+(p-1)^2-(p-2)]}<3p^{\frac{3}{2}}$$

$$|S|<\frac{7}{4}p^{\frac{6}{4}}.$$

6. Если хоть одно из чисел a, b, c кратно $p-1$, причем хоть одно из оставшихся не делится на $p-1$, то

$$|S|\leqq\sqrt{p}.$$

Наконец, если все три числа a, b, c кратны $p-1$, то

$$S=p-3.$$

§ 3. Применение найденной оценки к распределению первообразных корней.

1. Пусть k, m, n делители $p-1$, причем

$$1<k<p-1;\ 1<m<p-1;\ 1<n<p-1.$$

Пусть, далее, q и s несравнимы ни с нулем, ни между собою, и u, v, w какие либо целые. Обозначая буквою T число случаев, когда одновременно

$$\mathrm{ind}\,x\equiv u\,(\mathrm{mod}\,k);\ \mathrm{ind}\,(x+q)\equiv v\,(\mathrm{mod}\,m);\ \mathrm{ind}\,(x+s)\equiv w\,(\mathrm{mod}\,n),$$

где x пробегает полную систему вычетов по модулю p, исключая

$$x\equiv 0,\ x\equiv -q,\ x\equiv -s,$$

имеем:

$$T=\frac{1}{kmn}\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{\alpha=0}^{k-1}R_k^{\alpha(\mathrm{ind}\,x-u)}\sum_{\beta=0}^{m-1}R_m^{\beta[\mathrm{ind}\,(x+q)-v]}\sum_{\gamma=0}^{n-1}R_n^{\gamma[\mathrm{ind}\,(x+s)-w]}.$$

При $\alpha=\beta=\gamma=0$, результат суммирования по x будет $p-3$.

Если же хоть одно из чисел α, β, γ не равно нулю, то в результате суммирования по x получим величину, модуль которой

$$\leqq\frac{7}{4}p^{\frac{3}{4}}.$$

Поэтому,

$$T=\frac{p}{kmn}+\frac{\theta_1}{kmn}\left[(kmn-1)\frac{7}{4}p^{\frac{3}{4}}+3\right]$$

$$T=\frac{p}{kmn}+\theta\,2p^{\frac{3}{4}}. \qquad [B]$$

2. Теперь рассмотрим число U случаев, когда

$$\operatorname{ind} x \equiv u \pmod{k};\ \operatorname{ind}(x+q) \equiv v \pmod{m}$$

и $x+s$ первообразный корень. Обозначая символом T_n число случаев, когда

$$\operatorname{ind} x \equiv u \pmod{k};\ \operatorname{ind}(x+q) \equiv v \pmod{m};\ \operatorname{ind}(x+s) \equiv 0 \pmod{n},$$

мы в случае $1 < n < p-1$ имеем $T_n = T$ формулы $[B]$. При этом, как это следует из моих прежних работ, та же формула верна и при $n = 1$. Та же формула очевидно верна и при $n = p-1$. Поэтому имеем:

$$U = \sum \mu(n)\, T_n = \frac{p}{km} \sum \frac{\mu(n)}{n} + \theta\, 2^{\sigma+1}\, p^{\frac{3}{4}},$$

где σ число различных простых делителей $p-1$.

$$U = \frac{p}{km} \frac{\varphi(p-1)}{p-1} + \theta_2^{\sigma+1}\, p^{\frac{3}{4}}. \qquad [C]$$

3. Рассмотрим далее число V случаев, когда

$$\operatorname{ind} x \equiv u \pmod{k},$$

а $x+q$ и $x+s$ первообразные корни. Обозначая символом U_m число случаев, когда

$$\operatorname{ind} x \equiv u \pmod{k};\ \operatorname{ind}(x+q) \equiv 0 \pmod{m},$$

а $x+s$ первообразный корень, мы для всех случаев имеем $U_m = U$ формулы $[C]$. Поэтому,

$$V = \sum \mu(m)\, U_m = \frac{p}{k} \left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\right)^2 + \theta\, 2^{2\sigma+1}\, p^{\frac{3}{4}}. \qquad [D]$$

4. Наконец рассмотрим число W случаев, когда все три числа

$$x,\ x+q,\ x+s$$

суть первообразные корни. Обозначая символом V_k число случаев, когда

$$\operatorname{ind} x \equiv 0 \pmod{k},$$

а $x+q$ и $x+s$ первообразные корни, имеем $V_k = V$ формулы $[D]$. Поэтому,

$$W = p \left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\right)^3 + \theta\, 2^{3\sigma+1}\, p^{\frac{3}{4}}.$$

§ 4. Применение к распределению индексов.

1. Обозначая буквами U, V, W целые, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < U < p-1;\ 0 < V < p-1;\ 0 < W < p-1,$$

рассмотрим число T случаев, когда одновременно

$$\begin{aligned} 0 &< \operatorname{ind} x \leqq U, \\ 0 &< \operatorname{ind}(x+q) \leqq V, \\ 0 &< \operatorname{ind}(x+s) \leqq W. \end{aligned}$$

Очевидно:

$$T = \frac{1}{(p-1)^3} \sum_{u=1}^{U} \sum_{v=1}^{V} \sum_{w=1}^{W} \rho^{k[\operatorname{ind} x - u] + m[\operatorname{ind}(x+q) - v] + n[\operatorname{ind}(x+s) - w]}.$$

Часть этой суммы, отвечающая случаю $k=m=n=0$, будет

$$\frac{p-3}{(p-1)^3}UVW.$$

Модуль же оставшейся части будет не больше

$$\frac{1}{(p-1)^3}\frac{7}{4}p^{\frac{3}{4}}[U+(p-1)\lg(p-1)][V+(p-1)\lg(p-1][W+(p-1)\lg(p-1)].$$

Отсюда заключаем, что

$$T=\frac{UVW}{(p-1)^2}+\theta 5p^{\frac{3}{4}}(\lg p)^3.$$

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
23 II 1934.

MATHEMATICS

ON THE DISTRIBUTION OF PRIMITIVE ROOTS

By I. VINOGRADOW, Member of the Academy

SUMMARY

In the present note we investigate the following trigonometrical polynomial:

$$S=\sum_{x=1}^{p-1}\rho^{a\,\mathrm{ind}\,x+b\,\mathrm{ind}(x+h)+c\,\mathrm{ind}(x+k)},$$

where

$$\rho=e^{\frac{2\pi i}{p-1}},$$

p is a prime number, and h, k are integers ≥ 1.

We prove that

$$|S|<\frac{7}{4}p^{\frac{3}{4}},$$

and with the help of this inequality we prove some theorems concerning the distribution of primitive roots. For instance, we prove the following theorems:

1. For the number T of cases when

$\mathrm{ind}\,x\equiv u\,(\mathrm{mod}\,k)$; $\mathrm{ind}\,(x+q)\equiv v\,(\mathrm{mod}\,m)$; $\mathrm{ind}\,(x+s)\equiv w\,(\mathrm{mod}\,n)$

simultaneously, we have:

$$T=\frac{p}{kmn}+\theta 2p^{\frac{3}{4}}.$$

2. For the number W of cases when x, $x+q$, $x+s$ are primitive roots, we have:

$$W=p\left(\frac{\varphi(p-1)}{p-1}\right)^3+\theta 2^{3\sigma+1}p^{\frac{3}{4}},$$

where σ is the number of the prime divisors of $p-1$.

V. Steklov Physico-Mathematical Institute
of the Academy of Sciences. Leningrad.

Received
28. II. 1934.

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАМКНУТЫМИ ГРАНИЦАМИ

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 II 1934*)

Рассмотрим сперва задачу Dirichlet для многосвязных конечных плоских областей.

Пусть B — данная n-связная область, и C — ее контур. C — есть совокупность замкнутых кривых $C_0, C_1, \dots C_n$. За C_0 примем внешний контур области. Пусть $U(z)$, $z = x + iy$ — искомая гармоническая функция, $f_k(z)$ — ее значения на C_k. Назовем B_k односвязную область, ограниченную контуром C_k и содержащую внутри себя кривые $C_m (m \neq k)$. Фиксируем внутри $C_k (k = 1, 2, \dots n)$ точку z_k. Известно, что

$$U(z) = \sum_{k=0}^{n} U_k(z) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg |z - z_k|, \qquad [1]$$

где A_k — постоянные и $U_k(z)$ — функции гармонические каждая в соответствующей области B_k. Заметим, что сопряженные с $U_k(z)$ функции однозначны в B_k.

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ будет переменная точка контура, $d\sigma = |d\zeta|$, ν — направление внутренней нормали, $G_k(z; \zeta)$ — функция Green'a области B_k. Функция $U_k(z)$ по своим контурным значениям может быть восстановлена по формуле:

$$U_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} U_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma. \qquad [2]$$

Задача Dirichlet для области B будет решена, если мы найдем значения функций $U_k(z)$ на соответствующих контурах C_k и постоянные A_k. Для их определения имеем очевидную систему уравнений:

$$\text{на } C_k\colon\ U_k(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq k} \int_{C_m} U_m(\zeta) \frac{\partial G_m(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = \qquad [3]$$

$$= f_k(z) - \sum_{m=1}^{n} A_m \lg |z - z_m| \qquad (k = 0, 1, 2, \dots n)$$

Если найдены $U_k(z)$ и A_k, удовлетворяющие системе [3], формула [1] дает решение задачи.

Оставим пока A_k произвольными. Система [3] есть система функциональных уравнений относительно контурных значений $U_k(z)$. Она эквивалентна системе интегральных уравнений Fredholm'a.

Пусть $z = \omega_k(t)$ — функция, дающая отображение области B_k на круг радиуса 1. Положим в [3]

$$z = \omega_k(t), \ \zeta = \omega_m(\tau), \ e = e^{i\varphi}$$

и обозначим $F_{km}(t, \tau)\, d\psi$ результат этой подстановки в $\frac{\partial G_m(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma$. Положим еще

$$U_k(\omega_k(t)) = V_k(t); \ f_k(\omega_k(t)) - \sum_{m=1}^{n} A_m \lg |\omega_k(t) - z_m| = \varphi_k(t).$$

Система [3] переходит в следующую:

$$V_k(t) + \frac{1}{2\pi}\sum_{m \neq k}\int_0^{2\pi} F_m(t,\tau)\, V_m(\tau)\, d\psi = \varphi_k(t). \qquad [4]$$

Аргументы t и τ меняются каждый вдоль окружности единичного радиуса. Система [4] есть, таким образом, система уравнений Fredholm'a.

Система [3] при произвольной правой части неразрешима. Действительно, соответствующей однородной системе удовлетворяют $V_k = \alpha_k$, если α_k — постоянные, такие, что $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0$. Это следует из известного равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_k} \frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial \nu}\, d\sigma = 1. \qquad [5]$$

Мы переделаем систему [3] так, чтобы она стала разрешимой. Пусть $l_k(\zeta)$ — функции, удовлетворяющие равенству

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_k} l_k(\zeta)\, d\sigma = 1. \qquad [6]$$

Заменим систему [3] следующей:

$$W_k(z) + \frac{1}{2\pi}\sum_{m \neq k}\int_{C_m}\left[\frac{\partial G_m(z;\zeta)}{\partial \nu} - l_m(\zeta)\right] W_m(\zeta)\, d\sigma = \\ = f_k(z) - \sum_{m=1}^{n} A_m \lg|z - z_m|. \qquad [7]$$

Система [7] всегда имеет единственное решение. Чтобы доказать это, рассмотрим однородную систему:

$$W_k(z) + \frac{1}{2\pi}\sum_{m \neq k}\int_{C_m}\left[\frac{\partial G_m(z;\zeta)}{\partial \nu} - l_m(\zeta)\right] W_m(\zeta)\, d\sigma = 0. \qquad [8]$$

Пусть $W_k(z)$ $(k = 0, 1 \ldots m)$ решение этой системы. Обозначим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_m} W_m(\zeta)\, l_m(\zeta)\, d\sigma = a_m'.$$

a_m' — постоянные. Перепишем систему [8] в виде

$$W_k(z) + \frac{1}{2\pi}\sum_{m \neq k}\int_{C_m} \frac{\partial G_m(z;\zeta)}{\partial \nu}\, W_m(\zeta)\, d\sigma = \sum_{m \neq k} a_m' = a_k. \qquad [9]$$

Определим $W_k(z)$ как гармоническую в B_k функцию, значения которой на C_k равны W_k — решению системы [8]. Сравнивая равенства [9] и [1], находим, что

$$W(z) = \sum_{k=1}^{n} W_k(z)$$

есть гармоническая в B функция, равная постоянной a_k на C_k, причем сопряженная с ней функция $\overline{W}$ однозначна в B. Докажем, что $W(z)$ постоянна.

Введем в рассмотрение гармонические функции $\gamma_k(z)$, где $\gamma_0(z) \equiv 1$ и $\gamma_k(z)$ $(k=1, 2 \dots n)$ равны единице на C_k и нулю на C_m, $m \neq k$.

Условие однозначности $\overline{W}$ в области B можно записать в виде

$$\int_{C_k} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \sigma} d\sigma = -\int_{C_k} \frac{\partial W}{\partial \nu} d\sigma = 0 \qquad (k=1, 2 \dots n)$$

или

$$\int_{C_k} \gamma_k \frac{\partial W}{\partial \nu} d\sigma = \int_C W \frac{\partial \gamma_k}{\partial \nu} d\sigma = 0 \quad (k=1, 2 \dots n). \qquad [10]$$

Имеем, очевидно,

$$W = a_0 \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_0) \gamma_k.$$

Заметим, что равенство [10] справедливо и для $k=0$. Умножая равенство [10] на $a_k - a_0$ $(k=1, 2 \dots n)$ и на a_0 при $k=0$ и складывая, получаем:

$$\int_C W \frac{\partial W}{\partial \nu} d\sigma = 0,$$

откуда $W = \text{const}$. Раз $W(z)$ постоянна, функции $W_k(z)$ также постоянны. Имея это в виду и пользуясь равенствами [5] и [6], найдем из [8]:

$$W_k(z) = 0.$$

Система [7], таким образом, всегда разрешима.

Решим систему [7], заменяя в ней правые части сперва на $f_k(z)$, а затем на $\lg|z - z_j|$. Пусть соответствующие решения будут W_k' и W_{kj}. Решением системы [7] будет система функций

$$W_k = W_k' - \sum_{m=1}^{n} A_m W_{km}.$$

Определим постоянные A_k так, чтобы величина

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq k} \int_{C_m} W_m(\zeta) l_m(\zeta) d\sigma \qquad [11]$$

имела одно и то же значение для всех k. Это дает систему линейных уравнений с неизвестными A_k. Разрешенность этой системы следует из теоремы единственности. Обозначим величины [11] через A.

Окончательно, решение задачи получим в виде

$$U(z) = A + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k| + \sum_{k=0}^{n} W_k(k). \qquad [12]$$

Докажем, что при подходящем выборе функций $l_m(\zeta)$ система [7] разрешима методом последовательных приближений, если расстояние между контурами достаточно велико. Положим:

$$z = \omega_m(t), \quad \zeta = \omega_m(\tau). \quad t = \rho e^{i\varphi}, \quad \tau = e^{i\psi}.$$

При этом

$$\frac{\partial G_m(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi.$$

Если контура C_k достаточно удалены один от другого, максимум величины ρ для отображений контуров C_k будет величиной сколь угодно малой.

Положим:

$$l_m(\zeta) d\sigma = d\psi|_{\tau = \omega_m^{-1}(\zeta)}. \qquad [13]$$

Очевидно, что при таком выборе $l_m(\zeta)$ и при достаточной удаленности контуров друг от друга ядра интегралов [7] будут сколь угодно малы.

Систему [7] переделаем в систему уравнений Fredlholm'a, а последнюю в одно уравнение, которое запишем в виде

$$p(z) - \int_a^b k(z;\ \zeta)\, p(\zeta)\, d\sigma = Q(z).$$

При достаточной удаленности контуров, ядро $k(z;\ \zeta)$ будет сколь угодно малым и будет удовлетворять условию сходимости последовательных приближений

$$|k(z;\ \zeta)|\,(b-a) < 1.$$

Изложенный метод почти без изменений применим и для случая бесконечной области. Из всего вышесказанного следует доказательство принципа Dirichlet для многосвязных областей, если этот принцип доказан для соответствующих односвязных областей B_k.

Можно аналогичным методом решить задачу Dirichlet в пространстве для области, ограниченной несколькими замкнутыми поверхностями, если известно решение для области, ограниченной одной поверхностью. Введем обозначения такие же, как в плоской задаче. Известно, что

$$U(M) = \sum_{k=0}^{n} U_k(M), \qquad [14]$$

где M — точка пространства, $U(M)$ функция, гармоническая в области B, $U_k(M)$ — гармоническая в B_k и что представление [14] единственно. Обозначим $G_k(M,\ M_1)$ функцию Green'a для области B_k. Для определения граничных значений $U_k(M)$ имеем систему уравнений:

$$\text{на } C_k\text{: } U_k(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \int_{C_m} U_m(M_1) \frac{\partial G_m(M,\ M_1)}{\partial \nu}\, d\sigma = f_k(M) \qquad (k = 0, 1 \ldots n). \qquad [15]$$

Систему [15] легко переделать в систему уравнений Fredholm'a.

Пусть параметрические уравнения поверхностей C_k будут:

$$x = x_k(\alpha,\ \beta);\ y = y_k(\alpha,\ \beta);\ z = z_k(\alpha,\ \beta). \qquad [16]$$

Параметры α, β выберем так, чтобы они менялись от нуля до единицы. Заменим координаты точки M через $x_k(\alpha,\ \beta)$, $y_k(\alpha,\ \beta)$, $z_k(\alpha,\ \beta)$, а координаты точки M_1 в m-ом интеграле через $x_m(\alpha',\ \beta')$, $y_m(\alpha',\ \beta')$, $z_m(\alpha',\ \beta')$.

Система [15] тогда перейдет в систему Fredholm'a. Она имеет всегда единственное решение — это следует из единственности представления [14]. При достаточной удаленности поверхностей C_k система [15] разрешима методом последовательных приближений.

Сейсмологический институт
Академии Наук.
Ленинград.

Поступило
14 II 1934.

MATHEMATICS

DIRICHLET'S PROBLEM FOR A DOMAIN WITH SEVERAL CLOSED BOUNDARIES

By S. MICHLIN

(*Communicated by I. Vinogradow, Member of the Academy, 14 II 1934*)

We shall first consider Dirichlet's problem for a multiconnected finite plane domain. Be B a given domain and C its contour. C is in aggregate of closed curves $C_0, C_1, \ldots C_n$. Let us consider C_0, the external contour of the domain. Let $U(z)$, $z = x + iy$ be the unknown harmonical function and

$f_k(z)$ — its value upon C_k. Let us call B_k the single-connected domain which is bounded by contour C_k and contains the other curves C_m, $m \neq k$. We fix a certain point z_k within $C_k (k = 1, 2 \ldots n)$. It is known that

$$U(z) = \sum_{k=0}^{n} U_k(z) + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg |z - z_k|, \qquad [1]$$

where A_k are constants and $U_k(z)$ are functions each of which is harmonical in the respective domain B_k. Let it be noticed that functions conjugate with $U_k(z)$ are uniform in B_k.

Let $\zeta = \xi + i\eta$ be a variable point of contour, $d\sigma = |d\zeta|$, ν — the direction of the interior normal, and $G_k(z; \zeta)$ — Green's function for the domain B_k. Function $U_k(z)$ may be restored by means of the formula

$$U_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} U_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma. \qquad [2]$$

If we find the values of functions $U_k(z)$ on the respective contours C_k, we shall have solved Dirichlet's problem for the domain B. For determining them we have a system of equations:

$$\text{On } C_k: \; U_k(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{C_m} U_m(\zeta) \frac{\partial G_m(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = f_k(z) - \sum_{m=1}^{n} A_m \lg |z - z_m|. \qquad [3]$$

If we find $U_k(z)$ and A_k satisfactory for the system [3], the formula [1] gives the solution of Dirichlet's problem.

Let A_k be arbitrary. The system [3] is a system of functional equations with values of $U_k(z)$ on C_k as unknown. This system is equivalent to a system of Fredholm's integral equations.

Let function $z = \omega_k(\zeta)$ be a function giving a conformable representation of domain B_k upon the circle $|t| < 1$. We put into [3]

$$z = \omega_k(t), \; \zeta = \omega_m(\tau), \; \tau = e^{i\psi}.$$

The result of this substitution in $G_k(z; \zeta)\, d\sigma$ we designate by $F_{km}\, d\psi$. Now we put

$$U_k(\omega_k(t)) = V_k(t); \quad f_k(\omega_k(t)) - \sum_{m=1}^{n} A_m \lg |\omega_k(t) - z_m| = \varphi_k(i).$$

Then we obtain the following system:

$$V_k(t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq k} \int_{0}^{2\pi} F_{km}(t; \tau)\, V_m(\tau)\, d\psi = \varphi_k(t). \qquad [4]$$

Each of the arguments t and τ varies along a circumference with a radiu equal to 1. System [4] is consequently a system of Fredholm's equations.

If the right-hand side is left arbitrary, system [3] has no solution. Indeed, constants $V_k = \alpha_k$, where $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 0$, are satisfactory for the corresponding homogeneous system. The above is evident from the well-known formula:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = 1. \qquad [5]$$

We shall transform system [3] in order to make it solvable. Let $l_k(\zeta)$ be a function satisfactory for the ratio

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_k} l_k(\zeta)\,d\sigma = 1. \qquad [6]$$

We substitute the following system for system [3]:

$$\text{On } C_k\colon\ W_k(z) + \frac{1}{2\pi}\sum_{m\neq k}\int_{C_m}\left\{\frac{\partial G_m(z;\zeta)}{\partial \nu} - l_m(\zeta)\right\} W_m(\zeta)\,d\sigma = \qquad [7]$$

$$= f_k(z) - \sum_{m=1}^{n} A_m \lg|z - z_m|.$$

It may be demonstrated that system [7] has always only one solution.

Let us solve system [7] by replacing the right-hand side first by $f_k(z)$ and then by $\lg|z - z_j|$. If the corresponding solutions are W_k and W_{kj}, the solution of system [7] is expressed by the following formula:

$$W_k = W_k' - \sum_{m=1}^{n} A_m W_{km}.$$

Now we determine the constants A_k in order to have in the expression

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m\neq k}\int_{C_m} W_m(\zeta)\,l_m(\zeta)\,d\sigma \qquad [11]$$

the same value for all values of k. Thus we obtain a system of n linear equations with unknown A_k. From the theorem of unicity it follows that this system has only one solution. Let A denote the value of [11]. The solution of Dirichlet's problem is expressed by the formula

$$U(z) = A + \sum_{k=1}^{n} A_k \lg|z - z_k| + \sum_{k=0}^{n} W_k(z). \qquad [12]$$

We shall demonstrate that system [7] is solvable by the method of successive approximations if the contours C_k are sufficiently distant from each other, and the functions $l_k(\zeta)$ accordingly chosen. We put

$$z = \omega_m(t),\ \zeta = \omega_m(t),\ t = \rho e^{i\varphi},\ \tau = e^{i\psi}.$$

Then

$$\frac{\partial G_m(z;\zeta)}{\partial \nu}\,d\sigma = \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos(\psi-\varphi) + \rho^2}\,d\psi.$$

If the contours C_k are sufficiently distant from each other, the maximum of ρ for the representation of C_k may be as small as we like. We put

$$l_m(\zeta)\,d\sigma = d\psi\big|_{\zeta=\omega_m^{-1}(\zeta)}. \qquad [13]$$

Owing to this choice and to the remoteness of contours, the nucleus of integrals [7] may be as small as we like. Let us transform system [7] into a system of Fredholm's equations and the latter into a unique equation. We shal have it in the form:

$$p(z) - \int_a^b k(z;\zeta)\,p(\zeta)\,d\sigma = Q(z).$$

If the contours C_k are distant enough from each other, the nucleus $k(z; \zeta)$ may be small enough and satisfy the condition of convergence of successive approximations.

Dirichlet's problem may be solved by an analogous method within three dimensions for a domain limited by several closed surfaces, provided the solution for the domain limited by one surface be known.

Seismological Institute
of the Academy of Sciences.

Received
14. II. 1934.

МАТЕМАТИКА

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОСКИХ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 14 II 1934*)

Плоская задача о напряжениях сводится к решению бигармонического уравнения

$$\Delta^2 U = 0 \qquad [1]$$

по известным на границах области значениям $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$.

Ограничимся рассмотрением случая конечной многосвязной области, ограниченной контурами $C_0, C_1, C_2, \ldots C_m$. Назовем внешние области для $C_1, C_2, \ldots C_m$ соответственно через $T_1, T_2, \ldots T_m$, внутренность C_0 через T_0 и предположим, что последний контур содержит все остальные.

По заданным внешним силам значения $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ на каждом контуре определяются с точностью до постоянной; на одном контуре постоянные можно выбрать произвольно, на остальных они определяются из условия однозначности смещений.

Мы будем считать, что на каждом контуре главный вектор внешних сил равен нулю. Это всегда можно сделать вычитанием соответствующих частных решений, тогда функции $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ будут однозначными в рассматриваемой многосвязной области.

Предлагаемый нами метод состоит в следующем: функцию U мы ищем в виде суммы

$$U = U_0 + U_1 + \ldots + U_m \ldots, \qquad [2]$$

где $U_0, U_1, \ldots U_m$ регулярные бигармонические функции в областях $T_0, T_1, \ldots T_m$.

Если известны контурные значения для производных функций $U_0, U_1, \ldots U_m$, то последние определяются решением соответствующих задач для односвязных областей.

Обозначим на контуре C_n

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} + i \frac{\partial U_n}{\partial y} = g_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots m).$$

Предположим, что области $T_0, T_1, \dots T_m$ отображаются рациональной функцией на круг единичного радиуса плоскости ζ. Тогда по методу Н. И. Мусхелишвили (1) комплексная комбинация производных

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} + i\frac{\partial U_n}{\partial y}$$

в односвязной области T_n определяется через некоторые контурные интегралы, линейные относительно $g_n(z)$ и сопряженного $\overline{g_n(z)}$.

В переменных z это решение имеет вид:

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} + i\frac{\partial U_n}{\partial y} = \int_{(C_n)} K_n(z_n, z, \bar{z})\, g_n(z_n)\, dz_n + \int_{(C_n)} K_n^*(z_n, z, \bar{z})\, \overline{g(z_n)}\, dz_n, \quad [3]$$

$$(n = 0, 1, \dots m)$$

где известные функции $K_n(z_n, z, \bar{z})$ и $K_n^*(z_n, z, \bar{z})$ непрерывны в области T_n.

Н. И. Мусхелишвили принадлежит теорема (2), устанавливающая возможность представления $\frac{\partial U_n}{\partial x} + i\frac{\partial U_n}{\partial y}$ формулой [3] для общего случая любой отображающей функции, аналитически продолжимой за единичный круг плоскости ζ.[2]

Для определения искомых $g_0(z), g_1(z), \dots g_m(z)$, имеем следующую очевидную систему линейных интегральных уравнений:

$$f_n(z) = g_n(z) + \sum_{k=0}^{m}{}' L_{kn}(g_k, z) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots m), \quad [4]$$

где

$$f_n(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}$$

на контуре C_n, $L_{kn}(g_k, z)$ значение оператора $L_k(g_k, z)$ на том же контуре; штрих указывает на пропуск при суммировании члена, соответствующего $k = n$.

Напомним, что $f_n(z)$ определены на m контурах с точностью до комплексной постоянной.

Система [4], вообще говоря, решения не имеет. Действительно, рассматривая соответствующую однородную систему, полагая $g_k = \text{const}$ и замечая, что при этом $L_k(g_k, z) = g_k$, из уравнений [4] найдем:

$$\sum_{k=0}^{m} g_k(z) = 0, \quad [5]$$

откуда следует, что $g_k(z) = \text{const}$, удовлетворяющие уравнению [5], суть решения однородной системы. Эквивалентное ей уравнение Фредгольма имеет $2m$ фундаментальных вещественных функций.

Как показывает более подробное исследование, других фундаментальных функций нет.

Поэтому система [4] будет иметь решение лишь тогда, когда соответствующим выбором постоянных в ее левых частях мы удовлетворим условию ортогональности свободного члена эквивалентного системе уравнения к фундаментальным функциям присоединенного ядра.

[1] Сумму интегральных операторов формулы [3] обозначим через $L_n(g_n, z)$.

[2] С. Г. Михлин сообщил нам доказательство этой теоремы в предположении лишь непрерывности на контуре второй производной отображающей функции.

Однако, несколько видоизменив систему [4], мы получим новую, всегда разрешимую систему, определив из которой $g_k(z)$, найдем решение поставленной задачи о напряжениях.

Введем в рассмотрение функционал $L^k(g_k)$, линейный относительно $g_k(z)$ и $\overline{g_k(z)}$ и обращающийся в $g_k(z)$ при $g_k(z) = \text{const}$.

За такой функционал можно взять, например,

$$L^k(g_k) = L_k(g_k, 0).*$$

Отняв от правых частей уравнений системы [4] выражение $\sum_{k=0}^{m}{}' L^k(g_k)$, найдем:

$$f_n(z) = g_n(z) + \sum_{k=0}^{m}{}' L_{kn}(g_k, z) - \sum_{k=0}^{m}{}' L_k{}^k(g_k) \ldots \quad (n = 0, 1, \ldots m). \qquad [6]$$

Соответствующая однородная система имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{m}{}' L^k(g_k) = g_k(z) + \sum_{k=0}^{m}{}' L_{kn}(g_k, z) \qquad (n = 0, 1, \ldots m). \qquad [7]$$

Она решает задачу о напряжениях при нулевых внешних силах. Существует одно и только одно ее решение, определяемое равенствами:

$$g_k = \text{const}.(^3)$$

Но тогда, в силу свойств введенных операторов, из системы [7] найдем:

$$g_k(z) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots m); \qquad [8]$$

откуда заключаем, что система [6] имеет единственное решение. Определяемые из нее $g_k(z)$ удовлетворяют контурным значениям $f_n(z)$ с точностью до постоянного слагаемого $\sum_{k=0}^{m}{}' L^k(g_k)$.

Разрешив систему [6] относительно $g_k(z)$, найдем по формуле [3]

$$\frac{\partial U_k}{\partial x} + i\frac{\partial U_k}{\partial y}$$

и, наконец, из равенства [2] искомую функцию U.

Напомним, что функция U_0 дает решение внутренней задачи о напряжениях. Можно показать, что определяемое из уравнения [6] $g_0(z)$ соответствует на контуре C_0 внешним силам с главным моментом, равным нулю, как это должно быть для конечной области, если главный момент всех внешних сил, приложенных к контуру области, равен нулю.

Для выполнения указанных операций достаточно знать отображающую функцию односвязной области $T_k(k = 0, 1, \ldots m)$.

Изложенный метод позволяет также решить задачи теории упругости: с заданными на контурах смещениями, класс смешанных задач,

* Начало координат считаем лежащим внутри многосвязной области.

когда на некоторых контурах заданы смещения, на других — напряжения, и, наконец, бигармоническую задачу при точных значениях $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ на ограничивающих область контурах.

Сейсмологический институт
Академии Наук.
Ленинград.

Поступило
14 II 1934.

MATHÉMATIQUES

UN PROBLÈME DE THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ POUR LES DOMAINES MULTIPLEMENT CONNEXES

Par D. ŠERMAN

(*Presenté par I. Vinogradow, de l'Académie, le 14. II. 1934*)

RÉSUMÉ

La présente note donne l'exposé d'une nouvelle méthode de resolution du problème statique de théorie de l'élasticité sur les tensions pour les domaines plans multiplement connexes.

Désignons par C_0 le contour externe du domaine, par C_1, $C_2 \ldots . C_m$ ses contours internes; désignons par T_0 le domaine intérieur pour C_0 et respectivement par T_1, $T_2 \ldots . T_m$ les domaines extérieurs pour les autres contours.

Ce problème peut être réduit à la recherche de la fonction de Airy U étant données les valeurs de ses dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ au contour du domaine. Nous cherchons cette fonction en forme de la somme des $m+1$ fonctions

$$U = U_0 + U_1 + \ldots . + U_m,$$

dont chacune est une fonction régulière biharmonique dans le domaine respectif simplement connexe.

Les fonctions introduites $U_0, \ldots U_m$ peuvent être trouvées à l'aide des solutions des problèmes correspondants sur les tensions pour les domaines simplement connexes, si les valeurs de leurs dérivées sur les limites $C_0, C_1, \ldots C_m$ sont connues.

Pour déterminer ces dernières nous construisons un système d'équations intégrales linéaires et démontrons qu'il a une solution unique.

Institut Séismologique de l'Académie
des Sciences. Leningrad.

Manuscrit reçu
le 14. II. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] Н. И. Мусхелишвилли. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР, 1933. [2] Muschelišvilli. C. R., t. 185, 1927, p. 1184. [3] Muschelišvilli. Math. Ann., Bd 107, H. 2, 1932.

А. И. ПОПОВ

ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ В. А. ФОКА „ZUR BERECHNUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN WECHSELSTROMFELDES BEI EBENER BEGRENZUNG“

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 23 I 1934*)

В указанной работе (Annalen der Physik, Bd 17, H. 4, 1933) и раньше (В. Фок и В. Бурсиан, ЖРФХО, физ. отд., 58, стр. 356, 1926) В. А. Фок дает, между прочим, значение одного интересного определенного интеграла, именно:

$$\int_0^\infty J_0(\rho x)\left(\frac{\sqrt{x^2+p^2}-\sqrt{x^2+q^2}}{\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{x^2+q^2}}\right)^\nu \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}} = I_\nu\left(\rho\frac{p-q}{2}\right)K_\nu\left(\rho\frac{p+q}{2}\right). \qquad [1]$$

Помимо несомненной непосредственной ценности этого оригинального результата, его практическая ценность (очевидная из упомянутой статьи) побуждает нас сделать по этому поводу краткое замечание, содержащее новый путь вывода равенства [1]. В дальнейшем будем пользоваться следующими равенствами: интегральным представлением произведения, стоящего справа в [1], именно,

$$I_\nu\left(\rho\frac{p-q}{2}\right)K_\nu\left(\rho\frac{p+q}{2}\right) = \int_0^\infty J_{2\nu}\left(z\sqrt{p^2-q^2}\right)\frac{e^{-q\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\,dz, \qquad [2]$$

и интегралами

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\varrho x)\,e^{-z\sqrt{x^2+q^2}}}{\sqrt{x^2+q^2}}\,x\,dx = \frac{e^{-q\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2}}, \qquad [3]$$

$$\int_0^\infty J_{2\nu}\left(z\sqrt{p^2-q^2}\right)e^{-z\sqrt{x^2+q^2}}\,dz = \left(\frac{\sqrt{x^2+p^2}-\sqrt{x^2+q^2}}{\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{x^2+q^2}}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}}. \qquad [4]$$

Равенства [2], [3], [4] могут быть получены из интегралов, содержащихся в известных работах академика Н. Я. Сонина о функциях Бесселя (см., например, Nielsen, Handbuch d. Theorie d. Zylinderfunctionen).

Умножая [4] на $\frac{xJ_0(\rho)\,dx}{\sqrt{x^2+q^2}}$ и интегрируя по x от 0 до ∞, найдем:

$$\int_0^\infty J_0(\rho x)\left(\frac{\sqrt{x^2+p^2}-\sqrt{x^2+p^2}}{\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{x^2+q^2}}\right)^\nu \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+p^2}\sqrt{x^2+q^2}} = \int_0^\infty J_{2\nu}\left(z\sqrt{p^2-q^2}\right)dz\int_0^\infty \frac{J_0(\rho x)\,e^{-z\sqrt{x^2+q^2}}}{\sqrt{x^2+q^2}}\,x\,dx =$$

$$= \int_0^\infty J_{2\nu}\,z\left(\sqrt{p^2-q^2}\right)\frac{e^{-q\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\,dz = I_\nu\left(\rho\frac{p-q}{2}\right)K_\nu\left(\rho\frac{p+q}{2}\right), \qquad [5]$$

после применения сначала равенства [3], а затем [2]. Это и есть интересующий нас результат, границы приложимости которого, как легко видеть, совпадают с теми, которые указал В. А. Фок. Можно вывести и другие аналогичные интегралы.

Машиностроительный институт.
Ленинград.

Поступило
23 I 1934.

MATHEMATIK

BEMERKUNG ZUR ARBEIT VON V. FOCK „ZUR BERECHNUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN WECHSELSTROMFELDES BEI EBENER BEGRENZUNG“

Von A. POPOV

(*Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 23. I. 1934*)

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird die von V. Fock in der zitierten Arbeit bewiesene Relation [1] auf einem anderen Wege mittels der Beziehungen [2], [3], [4], abgeleitet.

Institut für Maschinenbau.
Leningrad.

Eingegangen
d. 23. I. 1934.

МАТЕМАТИКА

В. В. ПАЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ВЫРАЖЕНИИ ДЛЯ ДОЖИВАЕМОСТИ В УСЛОВИЯХ СМЕРТНОСТИ ДАННОГО КАЛЕНДАРНОГО ПРОМЕЖУТКА

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 II 1934*)

Под доживаемостью в некотором календарном промежутке условимся понимать вероятность дожития до заданного возраста лица из такой воображаемой совокупности, которая при своем старении последовательно проходит через все те значения повозрастной смертности, какие наблюдены в заданном (произвольной величины) календарном промежутке времени.

Пусть $\varphi(x, \tau)$ изображает плотность смертности для возраста x и календарного момента τ (в замкнутом, т. е. не подверженном миграции, населении).

Тогда

$$M_{x_1}^{\tau_1, \tau_2} = \int_0^{x_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(x, \tau)\, d\tau, dx \qquad (\tau_2 > \tau_1) \qquad [1]$$

будет численно равно количеству умерших в возрасте от 0 до x_1 за время (τ_1, τ_2), и, следовательно, при соответственно избранном виде функции, параметры $\varphi(x, \tau)$ могут быть определены тем или иным интерполяционным приемом на основе данных обычной статистической табличной разработки.

Пусть далее $g(\tau)$ — изображает плотность родившихся для момента τ. Выберем какой-либо возраст z. Тогда лица, достигающие возраста z

в промежутке времени (τ_1, τ_2) все, по моментам рождения будут относиться к промежутку

$$\tau_1 - z, \quad \tau_2 - z,$$

и все точки их линий жизни (т. е. моменты достижения различных возрастов x) будут лежать в той части координатной плоскости (x, τ), которая ограничена прямыми

$$\tau = (\tau_1 - z) + x$$
$$\tau = (\tau_2 - z) + x,$$

и, следовательно, количество доживших до возраста v, из числа родившихся в промежутке $(\tau_1 - z, \tau_2 - z)$, будет численно равно

$$L_v = \int_{\tau_1 - z}^{\tau_2 - z} g(\tau)\, d\tau - \int_0^v \int_{\tau_1 - z + x}^{\tau_2 - z + x} \varphi(x, \tau)\, d\tau\, dx. \qquad [2]$$

Полагая здесь $v = z$, получим L_z — число доживших до возраста z, причем до этого возраста (z) указанная совокупность доживет как раз в заданном календарном промежутке (τ_1, τ_2).

Вероятность лицу из указанной совокупности умереть в следующий элементарно-малый промежуток возраста

$$z; \quad z + dz$$

внутри тех же границ времени вымирания (τ_1, τ_2) будет:

$$\mu_z^{\tau_1, \tau_2} dz = \frac{dz \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(z, \tau)\, d\tau}{\int_{\tau_1 - z}^{\tau_2 - z} g(\tau)\, d\tau - \int_0^z \int_{\tau_1 - z + x}^{\tau_2 - z + x} \varphi(x, \tau)\, d\tau\, dx}. \qquad [3]$$

Рассматривая далее изменение z от 0 до исследуемого возраста x_1, приходим к следующему выражению для вероятности некоторой совокупности лиц дожить до возраста x_1, если эта совокупность на протяжении возрастного промежутка $(0, x)$ последовательно проходит через условия той повозрастной смертности, какая наблюдена в промежутке вымирания (τ_1, τ_2):

$$l_{x_1}^{\tau_1, \tau_2} = e^{-\int_0^{x_1} \frac{dz \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(z, \tau)\, d\tau}{\int_{\tau_1 - z}^{\tau_2 - z} g(\tau)\, d\tau - \int_0^z \int_{\tau_1 - z + x}^{\tau_2 - z + x} \varphi(x, \tau)\, d\tau\, dx}}. \qquad [4]$$

Найденное совершенно общее выражение для доживаемости, выражающее общую идею таблицы смертности „идеального“ поколения в случае вполне замкнутого населения, может иметь многочисленные практические приложения.

В качестве примера рассмотрим приложение найденного выражения к построению показателя детской смертности на протяжении некоторого календарного месяца (обычно получаемого чисто эмпирическими путями). Заметим, что на практике в этом случае можно обычно полагать

$$\varphi(z, \tau) = g(\tau - z) \cdot f(z).$$

Задавшись, для простоты, линейной зависимостью для $g(\tau)$

$$g(\tau) = a + b\tau$$

и перенеся начало координат в середину изучаемого промежутка времени, положим сначала

$$f(z) = k; \quad \varphi(z, \tau) = k[a + b(\tau - z)]. \qquad [5]$$

Тогда:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(z, \tau)\, d\tau = k(a - bz); \qquad \int_{-\frac{1}{2}-z}^{\frac{1}{2}-z} g(\tau)\, d\tau = a - bz;$$

$$\int_0^z \int_{-\frac{1}{2}-z+x}^{\frac{1}{2}-z+x} \varphi(x, \tau)\, d\tau\, dx = kz(a - bz);$$

и [4] принимает вид:

$$l_x = e^{-\int_0^x \frac{k(a-bz)\,dz}{a-bz-kz(a-bz)}} = 1 - kx, \qquad [6]$$

а вероятность смерти (на промежутке возраста $0, x$)

$$q_x = 1 - l_x = kx. \qquad [6a]$$

Постоянная k может быть определена из [1] путем использования статистических таблиц:

$$M_{(x)} = \int_0^x \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi(z, \tau)\, d\tau\, dz = kx\left(a - \frac{bx}{2}\right), \qquad [7]$$

$$k = \frac{M_{(x)}}{x\left(a - \frac{bx}{2}\right)},$$

где

$$a - \frac{bx}{2} = \frac{1}{x}\int_{-x}^{0} g(\tau)\, d\tau = n,$$

n — среднее число родившихся (в единицу времени) за календарный промежуток $(-x, 0)$.

Отсюда,

$$q_x = \frac{M_{(x)}}{n}. \qquad [8]$$

При указанном выше виде функций, определяющих рождаемость и смертность, получается, таким образом, обычная формула для показателя детской смертности. Отсюда ясно, что эта формула может применяться при условии пропорциональности смертности числу рождений соответственного поколения, причем коэффициент пропорциональности независим от возраста. В силу очевидной удаленности такого предположения от конкретной действительности, примем иное предположение о виде функции $\varphi(z, \tau)$, задавшись хотя бы простейшей зависимостью $f(z)$ от возраста. Положим

$$f(z) = k(1 - mz); \quad \varphi(z, \tau) = k[a + b(\tau - z)](1 - mz). \qquad [9]$$

В этих условиях [4] приводится к виду:

$$l_x = e^{-\int_0^x \frac{k(a-bz)(1-mz)\,dz}{a-bz-kz(a-bz)\left(1-\frac{mz}{2}\right)}} = \frac{kmx^2}{2} - kx + 1, \qquad [10]$$

и вероятность смерти

$$Q_{(x)} = 1 - l_{(x)} = kx\left(1 - \frac{mx}{2}\right). \qquad [10a]$$

В этом случае

$$M_{(x)} = \int_0^{x+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}} \varphi(z, \tau)\, d\tau\, dz = kx\left(1 - \frac{mx}{2}\right)\left(a - \frac{bx}{2}\right) + \frac{kbmx^3}{12},$$

откуда:

$$Q_{(x)} = \frac{M_{(x)}}{n} + r, \quad \text{где} \quad r = -\frac{kbmx^3}{12n}. \qquad [11]$$

Здесь r играет роль поправки на зависимость смертности от возраста. Легко видеть, что поправка эта существенна лишь при b неравном нулю, т. е. в случае наличия изменений в рождаемости.

Практически, величина поправки может быть вычислена различными способами. Укажем одну из приближенных формул для r, которую можно применять при исчислении смертности детей в возрасте от 0 до 12 месяцев:

$$r = -2.4\frac{b}{n}(6q_2 - q_{12}) \quad \text{и} \quad Q_{12} = q_{12} - 2.4\frac{b}{n}(6q_2 - q_{12}), \qquad [12]$$

где q_2 и q_{12}, вычисленные обычным способом (путем отнесения к среднему числу родившихся), вероятности умереть до 2 и до 12 месяцев, b — средний месячный прирост рождений и n — среднее число рождений за исследуемый и 12 предыдущих месяцев. Разумеется, указанная поправка делается существенной лишь при стремительном изменении во времени рождаемости и смертности. Приводим пример, характеризующийся такими резкими изменениями.

Помесячные показатели детской смертности (на 100 родившихся). Ленинград, 1919 г.

Месяцы	Истинная величина показателя *	Исчисления по обычному способу		По формуле [12]	
		Показатель	Ошибка	Показатель	Ошибка
Апрель	43.4	33.4	— 10.0	44.7	+ 1.3
Август	32.9	23.9	— 9.0	34.9	+ 2.0

* „Истинные“ показатели получены путем построений специальных таблиц смертности для данных календарных месяцев. 1919 год (война, блокада) характеризуется необычно высокими показателями детской смертности и стремительным падением рождаемости.

Заметим, наконец, что задание для $f(z)$ наиболее естественного показательного выражения

$$f(z)=ke^{-mz};\quad \varphi(z,\tau)=k[a+b(\tau-z)]e^{-mz}$$

приводит выражение [4] для вероятности дожития к очень простому виду. В этом случае:

$$l_x=e^{-\int_0^x \frac{k(a-bz)e^{-mz}dz}{(a-bz)-\frac{k}{m}(a-bz)(1-e^{-mz})}}=1+\frac{k}{m}(e^{-mx}-1), \qquad [13]$$

и вероятность смерти

$$Q_{(x)}{}^1=\frac{k}{m}(1-e^{-mx}), \qquad [13a]$$

откуда следует, что [6a] и [10a] получаются из [13a] разложением в ряд путем отбрасывания членов разложения, начиная со второго (для [6a]) и с третьего (для [10a]). Нужно сказать, однако, что пользование формулой [13a] менее удобно для практики, ибо нахождение постоянных в ней (k и m) путем интерполирования требует решения системы трансцендентных уравнений. Достигаемая же этим путем лишняя точность — на практике не нужна, ибо фактические значения чисел родившихся и умерших вообще лишь очень приблизительно могут быть интерпретированы простыми функциональными зависимостями.

Заметим еще, что применение общего выражения [4] к вопросам измерения детской смертности сообщает многим понятиям, например „детская смертность данного календарного месяца," — математический смысл, лишая эти понятия неопределенности.

Разработка иных приложений приведенного метода будет служить предметом дальнейших работ.

Демографический институт
Академии Наук. Ленинград.

Поступило
8 II 1934.

MATHEMATICS

ON A CERTAIN EXPRESSION FOR THE PROBABILITY OF SURVIVORSHIP

By V. PAJEVSKIJ

(*Communicated by I. Vinogradow, Member of the Academy, 8. II. 1934*)

Let $\varphi(x,\tau)$ denote the density of mortality at the age x and at any time τ, so that

$$M_{x_1}^{\tau_1,\tau_2}=\int_0^{x_1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\varphi(x,\tau)\,d\tau\,dx$$

will denote the number of persons who die within the period (τ_1, τ_2) and in the age-interval $(0, x_1)$; let, further, $g(\tau)$ denote the frequency of births at the time τ.

The aggregate of persons born in the period (τ_1-z, τ_2-z) who reached (alive) the age z within the interval of time (τ_1, τ_2) is evidently equal to

$$L(z)=\int_{\tau_1-z}^{\tau_2-z} g(\tau)\,d\tau-\int_0^z\int_{\tau_1-z+x}^{\tau_2-z+x}\varphi(x,\tau)\,d\tau\,dx. \qquad [1]$$

Then,

$$\mu_z^{\tau_1, \tau_2} dz = \frac{dz \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(z, \tau)\, d\tau}{\int_{\tau_1 - z}^{\tau_2 - z} g(\tau)\, d\tau - \int_0^z \int_{\tau_1 - z + x}^{\tau_2 - z + x} \varphi(x, \tau)\, d\tau\, dx}$$

will represent the probability of dying within the age-interval

$$z,\ z + dz$$

for the same interval of time (τ_1, τ_2). Therefore,

$$l_{x_1}^{\tau_1, \tau_2} = \exp \int_0^{x_1} - \frac{dz \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(z, \tau)\, d\tau}{\int_{\tau_1 - z}^{\tau_2 - z} g(\tau)\, d\tau - \int_0^z \int_{\tau_1 - z + x}^{\tau_2 - z + x} \varphi(x, \tau)\, d\tau\, dx} \qquad [2]$$

will be the probability of reaching (alive) the age x_1, under such conditions as allow the 'force of mortality' (μ_z) at any age z to be identical to that observed within the period (τ_1, τ_2).

This general expression [2] may be applied in many cases. As an example we may consider the case of computing the monthly rate of infant mortality. Practically, in such cases one may frequently put

$$\varphi(z, \tau) = g(\tau - z) f(z).$$

Setting

$$g(\tau) = a + b\tau$$

and $\tau_1 = -\frac{1}{2}$, $\tau_2 = +\frac{1}{2}$, we easily deduce from [2]:

$$l_x = \exp \int_0^x - \frac{f(z)\, dz}{1 - \int_0^z f(v)\, dv} = 1 - \int_0^x f(z)\, dz, \qquad [3]$$

and, hence,

$$q_x = \int_0^x f(z)\, dz \qquad [3a]$$

(q_x denoting the probability of dying before attaining the age x).

In this case

$$M_x^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = a \int_0^x f(z)\, dz - b \int_0^x z f(k)\, dz. \qquad [4]$$

1. Substituting here

$$f(z) = k,$$

we obtain:

$$q_x^{(1)} = kx, \qquad [5]$$

and

$$M_x = kx\left(a - \frac{bx}{2}\right), \qquad [5a]$$

and, finally,

$$q_x^{(1)} = \frac{M_x}{n} \qquad [6]$$

— a formula of common use for computing monthly death-rate (in case of infant mortality), where

$$n = a - \frac{bx}{2} = \frac{1}{x}\int_{-x}^{0} g(\tau)\, d\tau$$

denotes the average (monthly) number of births for the interval of time $(-x, 0)$.

2. Putting

$$f(z) = k(1 - mz),$$

we find

$$q_x^{(2)} = kx\left(1 - \frac{mx}{2}\right) \qquad [7]$$

and

$$M_x = kx\left(1 - \frac{mx}{2}\right)\left(a - \frac{bx}{2}\right) + \frac{kbmx^3}{12}, \qquad [7a]$$

hence,

$$q_x^{(2)} = \frac{M_x}{n} + r, \quad \text{where} \quad r = -\frac{kbmx^3}{12}. \qquad [8]$$

3. Assuming

$$f(z) = ke^{-mz},$$

we obtain:

$$q_x^{(3)} = \frac{k}{m}(1 - e^{-mx}), \qquad [9]$$

$$M_x = k\left[a\,\frac{1 - e^{-mx}}{m} - b\,\frac{1 - e^{-mx} - mxe^{-mx}}{m^2}\right]. \qquad [9a]$$

Formula [9] is less useful in practice, but in certain cases, when b differs considerably from zero, expression [8] gives sometimes much more accurate values for the monthly death-rates than formula [6] (see numerical examples in the Russian text of the article).

For practical computation the following formula deduced from []8 may be used:

$$q_{12}^{(3)} = q_{12} - 2.4\,\frac{b}{n}(6q_2 - q_{12}), \qquad [10]$$

where q_2 and q_{12} denote the values of probabilities of dying before attaining the age of 2 and 12 months respectively (computed in an ordinary way), l — the monthly increase of the number of births, and n — the average monthly number of births (as obtained from data of the previous year).

Demographical Institute of the
Academy of Sciences.
Leningrad.

Received.
8. II. 1934

ФИЗИКА

М. П. БРОНШТЕЙН

К ВОПРОСУ О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИНЦИПА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 22 I 1934*)

В недавно вышедшей работе Бор и Розенфельд [1] показали, что неопределенность в значении электрического поля, обусловленная излучением заряженного пробного тела, которое является измерительным прибором, всегда может быть сделана сколь угодно малой по сравнению с неопределенностью, обусловленной соотношением $\Delta p \Delta q \gtrsim h$. Однако, для того, чтобы измерить поле с максимальной точностью, не следует производить мысленный эксперимент так, чтобы реакция излучения на пробное тело была по возможности мала. Если нужно измерить среднее значение компоненты $\mathfrak{E}_x$ в объеме V и за промежуток времени T с помощью пробного тела объема V с равномерной плотностью заряда ρ, то мы имеем по определению

$$\rho \mathfrak{E}_x VT = (p_x)_{t+T} - (p_x)_t,$$

откуда

$$\Delta \mathfrak{E}_x \sim \frac{\Delta p_x}{\rho VT}.$$

Если время, необходимое для измерения импульса, равно Δt ($\ll T$ и если обозначить через Δx связанную с измерением импульса неопределенность в координате, то неопределенность в импульсе, связанная с реакцией излучения, равна по Бору и Розенфельду $\rho^2 V \Delta x \Delta t$ (так как электрическое поле, созданное измерением импульса в пространстве, занятом пробным телом, равно по порядку величины $\rho \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t$, а сообщенный этим полем пробному телу импульс равен произведению поля на $\rho V \Delta t$).

Поэтому,

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} + \frac{e^2}{V} \Delta + \Delta x,$$

где e заряд пробного тела (не смешивать с зарядом электрона e). Бор и Розенфельд показывают, что второй член может быть сделан сколь угодно малым по сравнению с первым. Но это не есть наиболее ловкий способ произвести мысленный эксперимент. Минимум Δp_x получается в том случае, когда оба члена имеют одинаковый порядок величины, т. е.

$$\Delta x \sim \sqrt{\frac{hV}{e^2 \Delta t}}.$$

Наименьшее значение Δp_x равно

$$(\Delta p_x)_{\min} \sim e \sqrt{\frac{h \Delta t}{V}},$$

и это дает для поля

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \sim \frac{1}{T} \sqrt{\frac{h \Delta t}{V}},$$

что при достаточно малых Δt может быть сделано сколь угодно малым. Две причины мешают, однако, неограниченно уменьшать продолжитель-

ность измерения импульса. Во-первых, из принципа относительности следует, что Δx должно быть меньше, чем $c\Delta t$ (скорость отдачи, вызванной измерением импульса, не может превосходить c). Поэтому,

$$\sqrt{\frac{\hbar V}{e^2\,\Delta t}} \lesssim c\Delta t \text{ или } c\Delta t \gtrsim \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^{1/3} V^{1/3}.$$

Во-вторых, из самого отделения измерения поля следует, что Δx должно быть гораздо меньше линейных размеров пробного тела, т. е.

$$\sqrt{\frac{\hbar V}{e^2\,\Delta t}} \ll V^{1/3} \text{ или } c\Delta t \gg \frac{\hbar c}{e^2}\, V^{1/3}.$$

Для минимального значения $\Delta\mathfrak{E}_x$ отсюда получаются два неравенства:

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gtrsim \frac{\sqrt{\frac{\hbar}{c}}}{TV^{1/3}} \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^{1/6}$$

и

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gg \frac{\sqrt{\frac{\hbar}{c}}}{TV^{1/3}} \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)^{1/2}$$

или, что тоже самое,

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gtrsim \frac{\hbar^{2/3}}{c^{1/3}\,TV^{2/3}\rho^{1/3}}$$

и

$$(\Delta\mathfrak{E}_x)_{\min} \gg \frac{\hbar}{TV^{4/3}\rho}.$$

Первая граница больше или меньше второй в зависимости от того больше ли e^2 чем $\hbar c$ или меньше. Если, например, измерительным прибором служит электрон, то существенна только вторая граница [это приводит к минимальному значению $\Delta\mathfrak{E}_x$, совпадающему по форме с тем, которое было найдено Фоком и Иорданом (2)]. Но так как для возможно более точного измерения поля в заданном элементе пространства времени выгодно употреблять по возможности большие заряды, то существенной оказывается первая граница, а не вторая. Принципиальная невозможность измерить с произвольной точностью поле в будущей релятивистской теории квант будет связана с принципиальным атомизмом материи, т. е. с принципиальной невозможностью беспредельно увеличивать ρ.

Что касается измерения магнитной компоненты $\mathfrak{H}_x$, то мы для этой цели применяем заряженное пробное тело, движущееся в направлении от y-ов со скоростью βc. В системе отчета, связанной с пробным телом, оно измеряет z-овую компоненту электрического поля, которая равна $-\frac{\beta\mathfrak{H}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Поэтому, мы получаем $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{\Delta p_z}{eT'}$, где T' промежуток времени между обоими измерениями импульса, измеренный по часам, связанным с пробным телом. Так как на основании принципа относительности $T' = T\sqrt{1-\beta^2}$, то

$$\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{c\Delta p_z}{eTv_y}.$$

Величина $\Delta y = v_y T$, т. е. смещение пробного тела в направлении y-ов за время измерения поля, должна быть очень мала по сравнению

с $V^{1/3}$. А так как Δp_z по порядку величины должно быть $\gtrsim \frac{h}{\Delta z}$, то, следовательно,

$$\Delta \mathfrak{H}_x \gtrsim \frac{hc}{e\Delta y\, \Delta z}.$$

(Эта формула представляет известную параллель выше приведенной формуле для $\Delta \mathfrak{E}_x$, которая может быть написана в виде $\Delta \mathfrak{H}_x \gtrsim \frac{hc}{e\Delta x \cdot cT}$, где cT есть, так сказать, смещение измерительного прибора в течение измерения поля в направлении оси ct.) Нижняя граница для $\Delta \mathfrak{H}_x$ связана с двумя обстоятельствами: во-первых, с условиями $\Delta z \lesssim c\Delta t$ и $\Delta y \lesssim cT$, и во-вторых, с условиями Δy, $\Delta z \ll V^{1/3}$. Так как Δz по порядку величины должно равняться $\sqrt{\frac{hV}{e^2\,\Delta t}}$ и так как при условии $cT \ll V^{1/3}$ (это условие делается также в работе Бора и Розенфельда) неравенство $\Delta y \lesssim cT$ делает излишним неравенство $\Delta y \ll V^{1/3}$, то для минимального значения $\Delta \mathfrak{H}_x$ получается такая же величина, как и для минимума $\Delta \mathfrak{E}_x$ (т. е. $\frac{h^{2/3}}{c^{1/3}\, T V^{2/3}\, \rho^{1/3}}$) при условиях, наиболее благоприятствующих измерению магнитного поля, а именно когда ρ по возможности велико и когда скорость пробного тела сравнима со скоростью света).

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
17 I 1934.

PHYSIK

ZUR RELATIVISTISCHEN ERWEITERUNG DES UNBESTIMMTHEITSPRINZIPES

Von M. BRONSTEIN

(*Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 22. I. 1934*)

In ihrer unlängst erschienenen Arbeit (1) finden Bohr und Rosenfeld, dass bei Messung des elektrischen Feldes die Ungenauigkeit, welche durch die Ausstrahlung des als Messinstrument benutzten geladenen Probekörpers bedingt ist, stets im Vergleich zu der durch das Verhältnis $\Delta p\, \Delta q \gtrsim h$ bedingten Ungenauigkeit sehr klein gemacht werden kann. Für eine möglichst genaue Bestimmung des Feldes ist es aber keineswegs geboten den Gedankenversuch so auszuführen, dass die Reaktion des Strahlung auf den Probekörper beliebig klein wäre. Wenn wir den Mittelwert der elektrischen Feldkomponente $\mathfrak{E}_x$ im Raumgebiet V und in der Zeitspanne T messen wollen mit Hilfe eines mit der gleichmässigen Dichte ρ geladenen Probekörpers vom Volumen V, so haben wir definitionsweise

$$\rho \mathfrak{E}_x\, VT = (p_x)_{t+T} - (p_x)_t,$$

woraus

$$\Delta \mathfrak{E}_x \sim \frac{\Delta p_x}{\rho VT}$$

folgt. Wenn die für die Impulsmessung erforderliche Zeit Δt ($\ll T$) ist und die mit der Impulsmessung verbundene Ungenauigkeit der Koordinate mit Δx bezeichnet wird, dann beträgt nach Bohr und Rosenfeld die mit der Reak-

tion der Strahlung verbundene Ungenauigkeit im Impuls $\varrho^2 V \Delta x \Delta t$ (denn nach den Maxwell'schen Gleichungen ist das durch die Messung des Impulses im von Probekörper erfüllten Raum erzeugte Feld $\sim p \frac{\Delta x}{\Delta t}$ Δt und der von diesem Feld dem Probekörper abgegebene Impuls ist gleich dem Feld mal $\varrho V \Delta t$). Demnach erhalten wir:

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{\Delta x} + \frac{e^2}{V} \Delta t \Delta x,$$

wo e die gesamte Ladung des Probekörpers ist (nicht mit der Elektronenladung e zu verwechseln!). Das zweite Glied, wie Bohr und Rosenfeld zeigen, kann im Vergleich zum ersten beliebig klein gemacht werden. Für die Ausführung des Gedankenexperimentes ist dieses Verfahren aber zu schwerfällig. Der Mindeswert von Δp_x ergibt sich dagegen wenn die beiden Glieder von derselben Grössenordnung sind, d. h. wenn

$$\Delta x \sim \sqrt{\frac{h V}{e^2 \Delta t}}.$$

Dieser Minimalwert von Δp_x beträgt

$$(\Delta p_x)_{\min} \sim e \sqrt{\frac{h \Delta t}{V}},$$

und das ergibt für die minimale Ungenauigkeit des Feldes

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \sim \frac{1}{T} \sqrt{\frac{h \Delta t}{V}},$$

welcher Ausdruck für genügend kleine Δt beliebig klein gemacht werden kann. Zwei Umstände verhindern es aber, die für die Impulsmessung verwendete Zeit Δt beliebig klein zu machen. Es folgt erstens aus der Relativitätstheorie dass Δx kleiner als $c \Delta t$ sein muss, d. h. während des durch die Impulsmessung verursachten Rückstosses kann die von Probekörper gewonnene Geschwindigkeit nur kleiner als c sein. Das heisst, dass

$$\sqrt{\frac{h V}{e^2 \Delta t}} \lesssim c \Delta t \quad \text{oder} \quad c \Delta t \gtrsim \left(\frac{hc}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}}.$$

Zweitens muss auch im Sinne der Definition der Feldmessung Δx viel kleiner als die linearen Abmessungen des Probekörpers sein, d. h.

$$\sqrt{\frac{h V}{e^2 \Delta t}} \ll V^{\frac{1}{3}} \quad \text{oder} \quad c \Delta t \gg \frac{hc}{e^2} V^{\frac{1}{3}}.$$

Für Minimalwert von $\Delta \mathfrak{E}_x$ ergeben sich daraus zwei Ungleichungen:

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \sim \frac{\sqrt{\frac{h}{c}} \left(\frac{h}{e^2}\right)^{\frac{1}{6}}}{T V^{\frac{1}{3}}} = \frac{h^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}} T V^{\frac{2}{3}} \varrho^{\frac{1}{3}}},$$

und

$$(\Delta \mathfrak{E}_x)_{\min} \gg \frac{\sqrt{\frac{h}{c}} \left(\frac{hc}{e^2}\right)^{1}}{T V^{\frac{1}{3}}} = \frac{}{T V^{\frac{4}{3}}}.$$

Die erste Grenze ist grösser bzw. kleiner als die zweite je nach dem, ob e^2 grösser oder kleiner als hc ist. Wenn z. B. das Elektron als Messinstrument verwendet ist, dann ist die zweite Grenze allein bestimmend [das

führt zu einem Minimalwert von $\Delta\mathfrak{E}_x$ welcher der Form nach mit dem von Fock und Jordan erörterten (2) übereinstimmt]. Da es für die möglichst genaue Feldmessung in dem gegebenen kleinen Raumzeitgebiet vorteilhaft ist, möglichst grosse Ladungen zu benutzen, wird die erste Grenze, und nicht die zweite, bestimmend. Die prinzipielle Unmöglichkeit, das Feld in der zukünftigen relativistischen Quantentheorie mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen, wird mit dem prinzipiellen Atomismus der Materie verbunden sein, d. h. mit der prinzipiellen Unmöglichkeit ρ beliebig hoch zu steigern.

Was die Messung der magnetischen Feldkomponente $\mathfrak{H}_x$ betrifft, so benutzen wir dazu einen in der y-Richtung mit der Geschwindigkeit βc bewegten geladenen Probekörper. In dem mit diesem Probekörper verbundenen Bezugssystem misst er die elektrische z-Komponente $-\frac{\beta\mathfrak{H}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$, und wir erhalten $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{\Delta p_z}{eT'}$, wo T' die an einer mit dem Probekörper fest verbundenen Uhr gemessene Zeitspanne zwischen zwei Impulsmessungen ist. Da bekanntlich $T' = T\sqrt{1-\beta^2}$, so erhalten wir:

$$\Delta\mathfrak{H}_x \sim \frac{c\Delta p_z}{eTv_y}.$$

Die Grösse $\Delta y = v_y T$, d. h. die Verschiebung in der y-Richtung während der Feldmessung muss sehr klein gegenüber sein. Da Δp_z der Grössenordnung nach nicht kleiner als $\frac{h}{\Delta z}$ sein darf, erhalten wir die Beziehung:

$$\Delta\mathfrak{H}_x \gtrsim \frac{hc}{e\Delta y\Delta z}$$

(Dieses bildet ein relativistisches Seitenstück zur vorher erhaltenen Beziehung für das elektrische Feld, die auch in der Form $\Delta\mathfrak{E}_x \gtrsim \frac{hc}{e\Delta x cT}$ geschrieben werden kann, wo cT, sozusagen, eine Verschiebung des Messinstruments in der Richtung der ct-Achse während der Feldmessung ist). Auch hier ist die untere Grenze für $\Delta\mathfrak{H}_x$ mit zwei Umständen verknüpft: erstens mit den Bedingungen $\Delta z \gtrsim c\Delta t$ und $\Delta y \lesssim cT$ und zweitens mit den Bedingungen Δy, $\Delta z \ll V^{\frac{1}{3}}$. Da Δz hier der Grössenordnung nach $\sim\sqrt{\frac{h\overline{V}}{c^2\Delta t}}$ sein muss und da bei der (auch von Bohr und Rosenfeld angenommen) Bedingung $cT \ll V^{\frac{1}{3}}$ Ungleichung $\Delta y \lesssim cT$ die andere Ungleichung $\Delta y \ll V^{\frac{1}{3}}$ überflüssig macht, erhalten wir für den Minimalwert von $\Delta\mathfrak{H}_x$ denselben Ausdruck wie für $\Delta\mathfrak{E}_x$ (d. i. $\frac{h^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}T^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{1}{3}}}$ in dem für die Messung des magnetischen Feldes günstigsten Falle eines grösstmöglichen ρ und bei grösstmöglicher Geschwindigkeit des Probekörpers).

Physikalisch-Mathematisches Institut der Akademie der Wissenschaften. Leningrad.

Eingegangen d. 17. I. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] N. Bohr und L. Rosenfeld. Det Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Math-fys. Meddel., XII, 8, 1933. [2] V. Fock und P. Jordan. Z. f. Phys., **66**, 206, 1930.

ФИЗИКА

Ю. А. КРУТКОВ

К ТЕОРИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $f(v, x, t)$ И ОБ УРАВНЕНИИ ДИФФУЗИИ

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 3 II 1934*)

§ 1. Пусть x координата и v скорость броуновской частицы (ради простоты рассматриваем одномерный случай; трехмерный не представляет никаких принципиальных трудностей). Для изменения этих величин за малое время τ пишем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v &= -Pv\tau + F\tau, \\ \Delta x &= v\tau + \frac{1}{2}F\tau^2. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Если $f(v, x, t)$ плотность вероятности для фазы (v, x) во время t и $\psi(v - v', \tau)\,dv'$ вероятность перехода от скорости v' к скорости v за промежуток времени τ, то имеем:

$$f(v, x, t+\tau) = f(v(1+P\tau), x - v\tau, t)(1+P\tau) - f(v, x, t) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(v', x - \frac{v+v'}{2}\tau, t\right)\psi(v - v', \tau)\,dv'. \qquad [2]$$

[2] получается совершенно также, как аналогичное соотношение для функции распределения скоростей ([1]). Пусть λ и μ чисто мнимые величины положим:

$$\Phi(\lambda, \mu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-\lambda v - \mu x} f(v, x, t)\,dv\,dx, \qquad [3]$$

$$\varphi(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\eta}\psi(\eta, \tau)\,d\eta. \qquad [4]$$

Для Φ мы получаем из [2] функциональное уравнение:

$$\Phi(\lambda, \mu, t+\tau) = \Phi(\lambda(1 - P\tau) + \mu\tau, \mu, t) - \Phi(\lambda, \mu, t) + \\ + \Phi(\lambda, \mu, t)\,\varphi\left(\lambda + \frac{\mu\tau}{2}, \tau\right) \qquad [5]$$

или, ограничиваясь при разложении по степеням τ линейными членами,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (P\lambda - \mu)\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \chi(\lambda)\,\Phi. \qquad [6]$$

Здесь $\chi(\lambda) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}$ $\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)_{\tau=0}\right.$ равно нулю, что легко получается из сингулярности ψ для $\left.\tau = 0\right]$.

Интегрирование [6] дает для $z = \log \Phi$:

$$z = \int^{\lambda} \frac{\chi(\lambda)\, d\lambda}{P\lambda - \mu} + F\left[\left(\lambda - \frac{\mu}{P}\right) e^{-Pt} + \frac{\mu}{P},\ \mu\right], \qquad [7]$$
$$\left(\lambda - \frac{\mu}{P}\right) e^{-Pt} + \frac{\mu}{P}$$

где F произвольная функция. Обращение [3] дает:

$$f(v, x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int e^{z + \lambda v + \mu x}\, d\lambda\, d\mu. \qquad [8]$$

Исходя из [8] и принимая во внимание [6], легко убеждаемся в том, что f удовлетворяет обобщенному уравнению Эйнштейна-Фоккера:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Pf + Pv \frac{\partial f}{\partial v} - v \frac{\partial f}{\partial x} + \chi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f. \qquad [9]$$

§ 2. Функции распределения для скоростей и для координат получаются из $f(v, x, t)$ интегрированием:

$$f_1(v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, x, t)\, dx, \quad f_2(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, x, t)\, dv. \qquad [10]$$

Из [8] они получаются, если положить μ (или λ) равным нулю и опустить множитель $\frac{1}{2\pi i}$ и соответствующее интегрирование [что следует из известного представления функции $\delta : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta}\, d\xi = 2\pi\delta(\eta)$]. Можно также без труда ввести в [8] вместо произвольной функции F начальное значение $f(v, x, 0)$:

$$f(v, x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\int\int\int \exp\left[\int + \lambda v + \mu x - \right.$$
$$\left. - \left\{\left(\lambda - \frac{\mu}{P}\right) e^{-Pt} + \frac{\mu}{P}\right\} u - \mu y\right] f(u, y, 0)\, d\lambda\, d\mu\, du\, dy, \qquad [11]$$

где пределы интегрирования по λ и μ равны $\pm i\infty$, по u и по y равны $\pm\infty$, $\exp \xi$ обозначает e^{ξ} и знак $\int$ стоит вместо интеграла формулы [7].

* В связи с [9] укажем на работу А. Колмогорова „Случайные движения" (в печати). За возможность ознакомиться с рукописью приносим А. Колмогорову благодарность. Аналогичные примыкающие к [9] вычисления были произведены М. А. Леонтовичем.

§ 3. Для $\lambda=0$ [7] имеет вид

$$\log \Phi|_{\lambda=0}=\int\limits_{\frac{\mu}{P}(1-e^{-Pt})}^{\lambda}\frac{\chi(\lambda)\,d\lambda}{P\lambda-\mu}+F\left[\frac{\mu}{P}(1-e^{-Pt}),\ \mu\right], \qquad [12]$$

для $\mu=0$ имеем:

$$\log \Phi|_{\mu=0}=\int\limits_{\lambda e^{-Pt}}^{\lambda}\frac{\chi(\lambda)\,d\lambda}{P\lambda}+F(\lambda e^{-Pt},\ 0). \qquad [13]$$

Из [12] и [13] следует для таких времен t, что можно пренебречь членами, имеющими множитель e^{-Pt}:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi|_{\mu=0}=0, \qquad [14]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi|_{\lambda=0}=\chi\left(\frac{\mu}{P}\right)\Phi|_{\lambda=0}, \qquad [15]$$

т. е. для рассматриваемых времен уже установилось предельное ($t\to\infty$) распределение для скоростей и, с другой стороны, для координат это не имеет места. Уравнение [15], как легко видеть, эквивалентно обычному уравнению диффузии для $f_2(x, t)$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}=D\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}, \qquad [16]$$

если еще положить

$$\chi\left(\frac{\mu}{P}\right)=\frac{P}{2a}\left(\frac{\mu}{P}\right)^2, \qquad [17]$$

причем $\frac{1}{2a}$ есть средний квадрат скорости $\overline{v^2}$, результат, полученный нами ранее из совсем других соображений (2). Для коэффициента диффузии получается верное значение:

$$D=\frac{1}{2aP}=\frac{\overline{v^2}}{P} \qquad [18]$$

$\left(\text{для закона Стокса имеем: } P=\frac{6\pi a\zeta}{m} \text{ и } D=\frac{m\overline{v^2}}{6\pi a\zeta}=\frac{kT}{6\pi a\zeta}\right)$.

Таким образом, для времен от $t=0$ до „e^{-Pt} не мало“ нужно рассматривать $f(v, x, t)$, удовлетворяющую [9]; если $e^{-Pt}\sim 0$, то имеем уже максвеллово распределение скоростей, а функция $f_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению диффузии; наконец для $t\to\infty$ получается стационарное распределение для координат.

Физико-математический институт
Академии Наук им. В. А. Стеклова.
Ленинград.

Поступило
3 II 1934.

ZUR THEORIE DER BROWNSCHEN BEWEGUNG

ÜBER DIE VERTEILUNGSFUNKTION $f(v, x, t)$ UND DIE DIFFUSIONSGLEICHUNG

Von G. KRUTKOW

(*Vorgelegt von A. Krylov, Mitglied der Akademie, d. 3. II. 1934*)

§ **1.** Es sei x die Koordinate und v die Geschwindigkeit eines Brownschen Teilchens (der Einfachheit halber betrachten wir den eindimensionalen Fall; der dreidimensionale bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten). Für die Veränderung dieser Grössen in der kleinen Zeitspanne τ machen wir den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v &= -Pv\tau + F\tau, \\ \Delta x &= v\tau + \frac{1}{2}F\tau^2. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Ist $f(v, x, t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Phase (v, x) zur Zeit t und $\psi(v - v', \tau)\,dv'$ die eine Übergangswahrscheinlichkeit von der Geschwindigkeit v' zur Geschwindigkeit v in der Zeitspanne τ, so hat man:

$$f(v, x, t+\tau) = f(v(1+P\tau),\ x - v\tau,\ t)(1+P\tau) - f(v, x, t) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(v', x - \frac{v - v'}{2}\tau, t\right)\psi(v - v', \tau)\,dv'. \qquad [2]$$

[2] ist auf ganz analoge Weise abzuleiten wie die entsprechende Beziehung für die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten (1). λ und μ seien rein imaginär; wir schreiben:

$$\Phi(\lambda, \mu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int e^{-\lambda v - \mu x} f(v, x, t)\,dv\,dx, \qquad [3]$$

$$\varphi(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\eta}\psi(\eta, \tau)\,d\eta. \qquad [4]$$

Für Φ erhält man aus [2] die Funktionalgleichung

$$\Phi(\lambda, \mu, t+\tau) = \Phi(\lambda(1 - P\tau) + \mu\tau,\ \mu,\ t) - \Phi(\lambda, \mu, t) + \\ + \Phi(\lambda, \mu, t)\,\varphi\left(\lambda + \frac{\mu\tau}{2},\ \tau\right) \qquad [5]$$

oder, wenn wir in der Entwicklung nach τ bei den linearen Gliedern abbrechen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (P\lambda - \mu)\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \chi(\lambda)\,\Phi. \qquad [6]$$

Hier ist $\chi(\lambda) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}$ $\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)_{\tau=0}\right.$ ist gleich Null, was man leicht aus dem singulären Verhalten von ψ für $\tau = 0$ folgert$\left.\right]$.

Die Integration von [6] ergibt für $z = \log \Phi$

$$z = \int^{\lambda} \frac{\chi(\lambda)\, d\lambda}{P\lambda - \mu} + F\left[\left(\lambda - \frac{\mu}{P}\right) e^{-Pt} + \frac{\mu}{P},\ \mu\right], \qquad [7]$$
$$\left(\lambda - \frac{\mu}{P}\right) e^{-Pt} + \frac{\mu}{P}$$

wo F eine willkürliche Funktion bedeutet.

Durch Umkehrung von [3] erhält man

$$f(v, x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int e^{z + \lambda v + \mu x}\, d\lambda\, d\mu. \qquad [8]$$

Ausgehend von [8] zeigt man ohne Mühe, wenn man [6] in Betracht zieht, dass f der verallgemeinerten Einstein-Fokker-Gleichung genügt:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Pf + Pv \frac{\partial f}{\partial v} - v \frac{\partial f}{\partial x} + \chi\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) f. \qquad [9]$$

§ 2. Die Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeit und für die Koordinate werden aus $f(v, x, t)$ durch Integration erhalten:

$$f_1(v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, x, t)\, dx, \quad f_2(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (v, x, t)\, dv. \qquad [10]$$

Aus [8] werden sie gewonnen, wenn man μ, resp. λ, gleich Null setzt und den Faktor $\frac{1}{2\pi i}$ und eine Integration fortlässt [das folgt aus der Beziehung: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta}\, d\xi = 2\pi\delta(\eta)$]. Auch kann man ohne Mühe in [8] statt der willkürlichen Funktion F den Anfangswert $f(v, x, 0)$ einführen:

$$f(v, x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iiint \exp\left[\int + \lambda v + \mu x - \right.$$
$$\left. - \left\{\left(\lambda - \frac{\mu}{P}\right) e^{-Pt} + \frac{\mu}{P}\right\} u - \mu y\right] f(u, y, 0)\, d\lambda\, d\mu\, du\, dy, \qquad [11]$$

wo die Integration über λ und μ zwischen den Grenzen $\pm i\infty$ und über u und y zwischen den Grenzen $\pm\infty$ auszuführen ist, $\exp\xi$, wie üblich, e^{ξ} und $\int$ das in [7] an erster Stelle stehende Integral bedeuten.

* In Zusammenhange mit [9] sei auf die Arbeit von A. Kolmogorov „Zufällige Bewegungen" hingewiesen (im Erscheinen). Für die Möglichkeit der Einsichtnahme in das Manuscript habe ich A. Kolmogorov sehr zu danken. Analoge an [9] anknüpfende Rechnungen wurden auch von M. Leontovič ausgeführt.

§ 3. Für $\lambda = 0$ nimmt [7] die Form

$$\log \Phi|_{\lambda=0} = \int_{\frac{\mu}{P}(1-e^{-Pt})}^{\infty} \frac{\chi(\lambda)\, d\lambda}{P\lambda - \mu} + F\left[\frac{\mu}{P}(1-e^{-Pt}),\ \mu\right] \qquad [12]$$

an. Für $\mu = 0$ erhält man

$$\log \Phi|_{\mu=0} = \int_{\lambda e^{-Pt}}^{\lambda} \frac{\chi(\lambda)\, d\lambda}{P\lambda} + F[\lambda e^{-Pt},\ 0]. \qquad [13]$$

Aus [12] und [13] folgt für solche t, dass man die mit dem Faktor e^{-Pt} behafteten Glieder vernachlässigen kann:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi|_{\mu=0} = 0 \qquad [14]$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi|_{\lambda=0} = \chi\left(\frac{\mu}{P}\right)\Phi|_{\lambda=0}, \qquad [15]$$

d. h. für die betrachteten Zeiten gilt schon die Grenzverteilung ($t \to \infty$) der Geschwindigkeiten und, andrerseits, ist für die Lagen die stationäre Grenzverteilung nicht erreicht. Die Gleichung [15] ist, wie man sich leicht überzeugt, der gewöhnlichen Diffusionsgleichung für $f_2(x, t)$ äquivalent:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}, \qquad [16]$$

wenn man noch

$$\chi\left(\frac{\mu}{P}\right) = \frac{P}{2a}\left(\frac{\mu}{P}\right)^2 \qquad [17]$$

setzt, mit $\frac{1}{2a}$ gleich dem mittleren Quadrat der Geschwindigkeit $\overline{v^2}$, ein Resultat, welches wir vorher aus ganz anderen Betrachtungen ableiteten [2]. Für den Diffusionskoeffizienten wird der richtige Wert

$$D = \frac{1}{2aP} = \frac{\overline{v^2}}{P} \qquad [18]$$

erhalten (unter Annahme des Stokesschen Gesetzes hat man $P = \frac{6\pi a\zeta}{m}$ und $D = \frac{m\overline{v^2}}{6\pi a\zeta} = \frac{kT}{6\pi a\zeta}$).

Somit haben wir folgendes Ergebnis. Für Zeiten zwischen $t = 0$ und e^{-Pt} noch nicht klein muss die Verteilungsfunktion $f(v, x, t)$ betrachtet werden, die der Gleichung [9] genügt. Ist $e^{-Pt} \sim 0$, so hat man schon die Maxwellsche Verteilung der Geschwindigkeiten und die Funktion $f_2(x, t)$ genügt der Diffusionsgleichung. Für $t \to \infty$ erhält man endlich die stationäre Verteilung für die Koordinaten.

Physikalisch-mathematisches Institut
der Akademie der Wissenschaften.
Leningrad.

Eingegangen
d. 3. II. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] G. Krutkow. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Über die Verteilung der Geschwindigkeiten. Phys. Z. d. Sowietunion (im Erscheinen). [2] G. Krutkow. l. c., § 4.

ФИЗИКА

В. Д. КУЗНЕЦОВ, Д. В. КОНВИСАРОВ и В. И. СТРОКОПЫТОВ

ПОВЫШЕНИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ КРУЧЕНИИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 14 I 1934)

При исследовании усталости металлов от знакопеременного кручения нами открыто новое явление, которое до сих пор, повидимому, никем не наблюдалось. Это явление заключается в весьма большом повышении пластичности металлического стержня, один конец которого закреплен неподвижно, а другой конец подвергается знакопеременному пластическому кручению.

Нами была построена специальная машина, сущность которой заключается в следующем. На чугунной панели помещены две стойки. В одной стойке неподвижно закреплена так называемая цанга для зажима одного конца испытуемой проволоки. В другой стойке в двух шариковых подшипниках может вращаться такая же цанга. Эта цанга приводится в колебательно-вращательное движение при помощи кривошипа и шатуна. Другой конец шатуна скреплен с вращающимся по одному направлению диском, причем расстояние между осью вращения диска и осью вращения шатуна на диске может изменяться при помощи особых салазок. Такая конструкция позволяет осуществлять колебательно-вращательное движение одной цанги на угол от 0° до $\pm 60°$.

Рабочая длина образца между цангами равнялась 70 мм; диаметры образцов были различные: для алюминия — 3.20 мм, для меди — 3.50 мм и для железа 2.45 мм.

Число оборотов диска в минуту равнялось 600, а угол закручивания одного конца стержня относительно другого в наших предварительных опытах изменялся от $\pm 10°$ до $\pm 30°$. Большинство опытов было произведено при угле $\pm 30°$. При угле кручения в 30° на протяжении длины в 70 мм мы очевидно имели дело с пластическими знакопеременными деформациями.

При той толщине образцов (от 2.45 до 3.50 мм) и при том очень жестком закреплении концов, которые были у нас, стрела прогиба, даже при значительном грузе, подвешенном к средине образца, была достаточно мала. Нужно было прилагать значительное усилие рукой, чтобы согнуть такой стержень из меди или алюминия. Во всяком случае, гиря в 1 кг не производила такого прогиба, который можно было обнаружить катетометром с точностью до 0.05 мм. Когда же машина приводилась в движение, то свойства образца резко изменялись. Образец становился настолько пластичным, что начинал течь под действием собственного веса и постепенно прогибался. Получалось такое впечатление, что длина стержня по мере роста числа циклов постепенно увеличивалась. Такой стержень можно было во время действия машины с очень малым усилием изгибать пальцами в любом направлении почти так же легко, как если бы стержень был сделан из свинца. Небольшой груз, например 50 г, приложенный к средине стержня, уже вызывал значительную стрелу прогиба в любом направлении.

Столь резкое повышение пластичности тотчас же прекращалось, как только останавливалась машина. Стержень приобретал первоначальные свойства и становился попрежнему прочным.

Повышение пластичности обусловлено исключительно знакопеременными пластическими деформациями, а не повышением температуры, которая поднимается всего на несколько градусов.

С повышением температуры пластичность твердых тел возрастает. Это значит, что с повышением температуры внутреннее трение или вязкость понижается. Знакопеременные пластические деформации играют, очевидно, такую же роль, как температура. С повышением температуры колебательные движения частиц твердого тела усиливаются, средние расстояния между частицами возрастают, взаимодействие между ними уменьшается и внутреннее трение падает.

Такое же действие производят и знакопеременные пластические деформации. Они вызывают периодические смещения одних частей стержня относительно других. Вследствие этих смещений средние расстояния между частицами возрастают, и пластичность повышается. Разница в действиях температуры и периодических пластических деформаций заключается только в том, что при нагревании усиливаются неупорядоченные движения частиц, тогда как при пластических деформациях эти перемещения носят упорядоченный характер.

Открытое нами явление прежде всего представляет теоретический интерес, объединяя действие нагревания с периодическими пластическими деформациями. Затем оно имеет большое практическое значение. До сих пор казалось совершенно непонятным то явление, что машинные валы, подвергающиеся периодическому знакопеременному кручению, в некоторых случаях изгибались, хотя запас прочности был достаточен. Если стать на ту точку зрения, что в некоторых, наиболее слабых, местах вала, даже при небольших напряжениях, происходят пластические деформации, то будет понятным прогибание валов.

Это явление мы намерены всесторонне изучать.

Лаборатория молекулярной физики
Сибирского физико-технического
института. Томск.

Поступило
14 I 1934.

PHYSIK

STEIGERUNG DER PLASTIZITÄT VON METALLEN BEI PLASTISCHER DREHUNG MIT ZEICHENÄNDERUNG

Von V. KUZNECOV, D. KONVISAROV und V. STROKOPYTOV

(Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 14. I. 1934)

Im Laufe unserer Untersuchung der Ermüdung von Metallen bei Drehung mit Zeichenänderung, entdeckten wir eine neue Erscheinung, die bisher wohl noch nicht beobachtet worden war. Diese Erscheinung besteht in einer sehr beträchtlichen Steigerung der Plastizität eines Metallstabes, der an einem Ende befestigt ist, während das andere einer plastischen Drehung mit Zeichenänderung unterworfen wird.

Zu diesem Zweck wurde von uns eine spezielle Maschine konstruiert, die in der Hauptsache folgendermassen eingerichtet ist. Auf einer gusseisernen Unterlage sind zwei Ständer aufgestellt. An dem einen ist eine Zange angebracht, die zur Befestigung des einen Endes des zu untersuchenden Drahtes dient; am anderen Ständer kann in zwei Kugellagern eine ebensolche Zange sich drehen. Diese Zange wird mit Hilfe von Kurbel und Triebstange in eine Schwingungs-Drehbewegung versetzt. Das andere

Ende der Triebstange wird an einer stets in derselben Richtung sich drehenden runden Scheibe befestigt, wobei sich der Abstand zwischen der Drehungsachse der Scheibe und der Drehungsachse der Triebstange auf der Scheibe mittels besonderer Schlitten verändert werden kann. Diese Konstruktion gestattet die Schwingungs- und Drehbewegung einer Zange in einem Winkel von 0° bis ± 60° zu verwirklichen.

Die Versuchslänge des Probestückes zwischen den Zangen war gleich 70 mm, der Durchmesser der Stücke war verschieden; für Alumunium — 3.20 mm, für Kupfer — 3.50 mm und für Eisen — 2.45 mm.

Die Drehungszahl der runden Scheibe war 600 pro Minute und der Drehungswinkel des einen Stabendes gegen das andere veränderte sich in unseren Vorversuchen von ± 10° bis ± 30°. Die Versuche wurden zum grössten Teile mit einem Winkel von ± 30° durchgeführt. Bei einem Drehungswinkel von 30° auf einer Länge von 70 mm hatten wir es augenscheinlich mit plastischen Deformationen unter Zeichenveränderung zu tun.

Bei einer solchen Dicke der Probestüke (von 2.45 bis 3.50 mm) und bei der sehr kräftigen Befestigung der Enden, die wir hatten, war der Biegungspfeil sogar bei einer beträchtlichen Belastung, die sich in der Mitte des Stückes befand, klein genug. Eine erhebliche Druckleistung mit der Hand war erforderlich, um einen solchen Stab von Kupfer oder Aluminium zu biegen. Jedenfalls vermochte ein Gewicht von 1 kg keine Biegung zu bewirken, die man am Kathetometer mit einer Genauigkeit von 0.05 mm hätte ermitteln können.

Wenn aber die Maschine in Gang gesetzt wurde, so erlitten die Eigenschaften des Probestückes eine scharf ausgesprochene Veränderung. Es wurde so plastisch, dass es unter dem Drucke der eigenen Last weich wurde und sich allmählich verbog. Man empfing den Eindruck, dass die Länge des Stabes nach Massgabe des Anwachsens der Kreiszahl allmählich wuchs. Einen solchen Stab konnte man während der Arbeit der Maschine ebenso leicht mit einem leisen Fingerdrucke in beliebiger Richtung verbiegen, als wenn selbiger von Blei wäre. Eine kleine Last, z. B. 50 g in der Mitte des Stabes angelegt, rief schon einen beträchtlichen Biegungspfeil in einer beliebigen Richtung hervor.

Eine so jähe Steigerung der Plastizität wurde sofort abgebrochen, sobald die Maschine in Stillstand geriet. Der Stab gewann dabei seine frühere Beschaffenheit wieder und wurde fest wie zuvor.

Die Steigerung der Plastizität hing ausschliesslich von den plastischen Deformationen unter Zeichenveränderung ab, nicht aber von einer Temperaturerhöhung, die überhaupt nur wenige Grad betragen konnte.

Bei Ansteigen der Temperatur steigt auch die Plastizität der festen Körper; dieses bedeutet, dass bei Temperaturerhöhung die innere Reibung oder die Zähigkeit abnimmt. Plastische Deformationen unter Zeichenveränderung spielen hier augenscheinlich dieselbe Rolle, wie die Temperatur. Bei Temperaturerhöhung steigern sich auch die Schwingungsbewegungen der Teilchen eines festen Körpers. Dabei wächst der mittlere Abstand zwischen den Teilchen, ihre Wechselwirkung verringert sich und die innere Reibung schwindet.

Ebensolchen Einfluss üben auch plastische Deformationen unter Zeichenveränderung. Sie bewirken periodische gegenseitige Verschiebungen einzelner Teile des Stabes. Infolge solcher Verschiebungen wachsen die mittleren Abstände zwischen den Teilchen an und die Plastizität wird erhöht. Der Unterschied in der Wirkung der Temperatur und der periodischen plastischen Deformation besteht nur darin, dass bei Erwärmung die

unregelmässigen Bewegungen der Teilchen anwachsen, während bei plastischen Deformationen diese Verschiebungen einen geregelten Charakter annehmen.

Die von uns entdeckte Erscheinung ist zunächst theoretisch interessant, da hier die Wirkung der Erwärmung mit periodischen plastischen Deformationen vereinigt wird. Ausserdem hat sie auch eine grosse praktische Bedeutung.

Es erschien bisher ganz unverständlich, wie sich Maschinenwellen, die unter Zeichenveränderung periodische Drehung erfuhren, in einigen Fällen verbiegen konnten, trotzdem der Festigkeitsvorrat genügend gross war. Wenn man aber in Betracht zieht, dass an einigen schwächeren Stellen der Welle sogar bei geringen Spannungen plastische Deformationen stattfinden, so wird die eventuelle Verbiegung der Welle leicht begreiflich.

Diese Erscheinung nehmen wir uns vor allseitig zu untersuchen.

Laboratorium für Molekularphysik
des Sibirischen physikalisch-technischen
Instituts. Tomsk.

Eingegangen
d. 14. I. 1934.

ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

К. К. АНДРЕЕВ и Ю. Б. ХАРИТОН

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О МЕХАНИЗМЕ САМОРАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ РЕАКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 9 II 1934)

Основное положение современной цепной теории химических реакций состоит в том, что элементарный акт реакции обладает способностью за счет энергии реакции, выделяющейся в том или в другом виде, вызывать следующий элементарный акт, обусловливая таким образом способность реакции к самораспространению, причем этот механизм реакции допускает возможность весьма больших линейных скоростей распространения.

Такой характер процесса чрезвычайно близко напоминает хорошо известное явление распространения экзотермической химической реакции путем детонации.

Естественна поэтому попытка трактовать возникновение и распространение [1] детонации как возникновение и развитие бесконечно-длинной цепи реакции. Такая попытка, однако, встречает ряд затруднений.

Прежде всего, современная цепная теория рассматривает развитие только гомогенной реакции и учитывает изменение длины цепи в основном лишь как функцию температуры; в соответствии с этим, условие образования бесконечно-длинной цепи она формулирует как достижение системой некоторой критической температуры.

При детонации же реакция распространяется при этом в систему, температура которой может варировать в весьма широких пределах, и условие возникновения детонации должно очевидно определяться другими параметрами, чем начальная температура системы. Другим слабым местом цепной теории является то обстоятельство, что, согласно теории разветвляющейся цепи, последняя становится при определенных температурных условиях бесконечной независимо от числа начальных центров. Опыт же напротив показывает, что число (концентрация) на-

чальных центров при возникновении детонации или вспышки играет большую роль.

Точно также в свете цепной теории очень трудно понять, почему система, способная к детонации при обыкновенной температуре, т. е. по цепной концепции дающая цепи, способные распространяться даже в холодную среду, в то же время способна при повышенных температурах, где казалось бы условия образования бесконечной цепи более благоприятны, давать медленное термическое разложение (2).

Наконец, опыты воздействия на взрывчатые вещества различных агентов (3), вызывающих распад отдельных молекул (α-лучи, X-лучи и т. д.), не дающие взрыва даже в случае таких высокочувствительных взрывчатых веществ, как иодистый азот, также непосредственно иллюстрируют недостаточность распада отдельной молекулы для возникновения детонации или вспышки.

Все эти наблюдения показывают, что невозможность при обычной температуре образования бесконечной цепи от одного центра реакции представляет общее явление.

Нетрудно понять, что этот факт является необходимым условием самого существования устойчивой взрывчатой системы: система, способная к образованию бесконечно-длинной цепи при обычной температуре в результате разложения одной молекулы, была бы практически нежизнеспособной.

Простой расчет на основе данных скорости медленного распада при повышенных температурах и ее зависимости от температуры показывает, что при обычной температуре в 1 г взрывчатого вещества распадается около 10^6 молекул. Таким образом, если бы распад молекулы вел к образованию бесконечно-длинной цепи, то среднее время жизни такого вещества имело бы порядок только нескольких минут.

Таким образом, невозможность развития ординарной бесконечной цепи является естественным условием возможности реального существования данной взрывчатой системы; но, с другой стороны, самый факт существования явления детонации, которое при его скорости распространения трудно рассматривать иначе как развитие фронта цепей, указывает на возможность распространения бесконечной цепи даже в „холодную“ среду.

Естественным разрешением такого парадокса является допущение, что для возникновения самораспространяющейся реакции необходимым условием является возникновение не одного центра, а локализованной во времени и пространстве группы центров.*

Возникновение микро-цепи может произойти лишь при условии определенной величины флюктуации энергии молекулы (получении отдельной молекулой энергии не меньшей энергии активации): следует предположить, что и возникновение самораспространяющейся реакции (возникновение макро-цепи) также может иметь место лишь при условии некоторой минимальной флюктуации энергии группы молекул.

Минимальная степень локализации энергии, необходимая для распространения макро-цепи, очевидно определяется условием, чтобы энергия, передаваемая молекуле реагирующего вещества какой либо частицей продуктов распада, превосходила энергию активации молекулы.

* Сходные соображения о возникновении детонации высказывались рядом авторов (Гарнер, Семенов и др.). В наиболее ясной форме необходимость одновременного распада нескольких молекул в одной точке, как условие детонации или вспышки, постулировалась в последнее время Мюрауром (4).

Точно так же можно рассматривать известную минимальную степень локализации энергии реакции как условие, определяющее возможность самораспределения макро-цепи. В этом случае степень локализации (в пространстве и времени) соответствует энергии продукта реакции в предыдущем случае, а энергии активации молекулы соответствует некоторая „степень чувствительности" системы, одним из существенных факторов которой является энергия активации отдельной молекулы.

Для иллюстрации основной идеи мы пользовались, в качестве примера, цепной схемой. Однако изложенные соображения в общем виде применимы к любому механизму распространения — цепному, тепловому, автокаталитическому и т. д. — который может регенерировать тот или иной вид импульса, вызывающего реакцию. Цепная теория является лишь частным микро-случаем общей схемы, рассматривающей возможность распространения реакции как функцию „концентрации импульса" и „чувствительности к распространению" данной системы.

Институт химической физики.
Ленинград.

Поступило
9 II 1934.

CHEMICAL PHYSICS

SOME CONSIDERATIONS ON THE MECHANISM OF SELF-PROPAGATING REACTIONS

By K. ANDREJEV and J. CHARITON

(*Communicated by N. Semenov, Member of the Academy, 9. II. 1934*)

The fundamental concept of the modern chain theory of chemical reactions is the ability of the elementary process to create the conditions for the next process at the expense of the reaction energy evolved in some form, thus making possible the self-propagation of the elementary process. From such a mechanism, as may easily be understood, very high linear velocities of propagation of chemical reaction may be obtained.

The character of this type of process closely resembles that of the well-known process of self-propagation of the exothermic reactions by detonation.

It is quite natural, therefore, to try to consider the initiation and propagation of detonation as the initiation and development ([1]) of infinite chains. Such attempts, however, encounter certain difficulties.

The chain theory in its present form deals with the development of the homogeneous reaction only and leads to an expression for the length of the chain which depends only on the temperature of the system. The attainment of a critical temperature is then the condition of the formation of infinite chains.

In the case of detonation, however, the reaction is propagated (i. e. proceeds heterogeneously), and this propagation can occur in a system the temperature of which may vary over a very wide range. Thus the condition of the initiation of detonation must be determined by some parameters other than the initial temperature of the system.

Another weak point of the chain theory is that according to it the branching chain may become infinite independently of the number of initial centres, whereas in practice at the initiation of detonation or combustion this number plays a very important role.

It is further very difficult to understand on the basis of the chain theory the fact that a system which detonates, i. e. a system in which the chains are propagated infinitely into a 'cold' medium, can also slowly decompose at much higher temperatures, where the conditions for the developement of chains are undoubtedly more favourable.(2)

Investigations on the effect on explosives of various agencies (α-rays, X-rays, etc.) which decompose single molecules, (3) have shown that under their action explosion does not take place even in the case of the most sensitive explosives such as nitrogen iodide. This also clearly indicates that infinite chains do not develop under such conditions from a single centre.

In the light of these observations the impossibility of the formation of infinite chains at normal temperatures from a single centre appears to be a general phenomenon. The same conclusion may be reached starting from quite different considerations. A simple calculation based on data for the velocity of the slow thermal decomposition of explosives and its variation with temperature shows that at room temperature about 10^6 molecules decompose during one second in one gram of explosive. If the decomposition of each molecule was followed by the formation of an infinite chain, the average life of an explosive would have to be only several minutes. Thus, the impossibility of the developement of a single infinite chain is the condition of the very existence of an explosive.

However, the existence of detonation phenomena indicates that an infinite chain can be propagated even into a 'cold' medium, since it is difficult to interpret such tremendous velocities of propagation without the concept of an advancing front of chains.

The natural solution of these contradictions is to assume that the initiation of a self-propagating reaction can take place not as a result of the formation of one centre, but only as a result of the formation of a group of centres localized in time and space.*

The initiation of a chain in chain reactions can occur as a result of a definite fluctuation in the energy of a molecule (the acquisition by any one molecule of energy not less than the energy of activation), i. e. as a result of a definite localization of energy.

In the same way the initiation of a self-propagating reaction (the initiation of the macro-chain) can take place only as a result of a certain fluctuation in the energy of several molecules.

The minimum degree of localization of energy which is necessary for the propagation of a single chain is represented by the case when the energy transferred by one of the products of reaction equals the energy of activation.

In the same way we may consider that a certain minimum degree of localization of the reaction energy is necessary for the self-propagation of the macro-chain. Here the degree of localization (in space and time) corresponds to the energy of the reaction product in the case of a single chain, and to the energy of activation there corresponds a certain 'degree of sensitivity' of the system, depending to a large extent on the energy of activation of a single molecule.

In order to illustrate the fundamental idea, the chain mechanism has been used as an example. However, the concepts developed in their gener-

* Similar ideas on the initiation of detonation were proposed by several authors (Garner, Semenov, and others). In the clearest form the necessity of simultaneous decomposition of several molecules in one point for the initiation of detonation or combustion was recently postulated by H. Muraour.(4)

al form may be applied to any mechanism of propagation — by chains, heat, autokatalysis, etc., which can regenerate the particular impulse promoting the reaction. The chain theory is just a special 'micro-case' of the general concept, it regards the possibility of the propagation of a reaction as a function of the 'impulse concentration' and of the, 'sensitivity to propagation' of the system.

Institute of Chemical Physics.
Leningrad.

Received
9. II. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] B. Lewis. Journ. Am. Chem. Soc., **52**, 3120 (1930). [2] H. Muraour. Chimie et Industrie, Mars 1933. [3] Ebler. Ber. deutsch. Chem. Ges., **43**, 2613 (1919). — Günther, Lepin und Andreew. Z. f. Elektrochemie, **36**, 218 (1930). — Muraour. Chimie et Industrie, **30**, 39 (1933). [4] Chimie et Industrie, **30**, 39 (1933).

ХИМИЯ

М. М. КАЦНЕЛЬСОН и М. И. КАБАЧНИК

АМИДИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ НАТРИЙ- И КАЛИЙ-АМИДА В РЯДУ АЛКАЛОИДОВ

I. ОБ α-АМИНОАНАБАЗИНЕ

(Представлено академиком А. Е. Фаворским 16 II 1934)

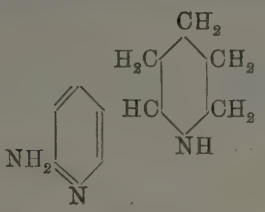
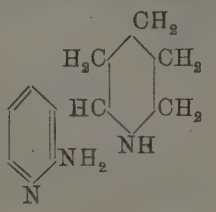
Обычные способы получения аминопроизводных мало применимы в пиридиновом ряду и в ряду алкалоидов. Благодаря открытой А. Е. Чичибабиным и О. А. Зейде [1] реакции трудности получения аминопроизводных в пиридиновом ряду были устранены. Эта реакция в дальнейшем была применена А. Е. Чичибабиным к алкалоиду никотина, и это был первый пример применения реакции амидирования пиридинового ядра с помощью натрий-амида к природным алкалоидам [2].

Нас интересовал вопрос о применении этой реакции в области других алкалоидов, вопрос, насколько эта реакция в условиях, проводимых А. Е. Чичибабиным, является общей в области алкалоидов. Решение этого вопроса может привести к получению ряда аминопроизводных алкалоидов, благодаря чему может стать доступным ряд новых соединений, могущих обладать сильным физиологическим действием.

Нашу работу мы начали с амидирования анабазина, являющегося алкалоидом *Anabasis Aphylla* L. Работа с этим алкалоидом стала возможна после появления исследования А. П. Орехова и Г. Меньшикова [3], безукоризненно доказавших строение этого алкалоида и окончательно установивших формулу анабазина как α-пинеридил-β-пиридин. Наше исследование показало, что и здесь реакция амидирования применима.

Натрий-амид действует на анабазин подобно тому, как он действует на пиридин, никотин. При этом выделяется водород, и полученный продукт представляет собой аминоанабазин.

И здесь по аналогии с другими случаями получающемуся основанию следует приписать строение α-аминоанабазина, но при этом возможны два изомерных α-замещенных производных, так как анабазин является β-замещенным пиридина. Пока остается еще не выясненным, какая из двух формул принадлежит полученному веществу:

I  или II 

Из двух возможных α-аминоанабазинов нами был выделен один, с температурой плавления 105—106°, дающий пикрат с температурой плавления 233—233.5° с разложением. Высшая фракция при получении аминоанабазина пока еще не была подвергнута дальнейшему исследованию.

Работа в направлении изучения аминоанабазина и амидирования других алкалоидов продолжается.

ЧАСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ

Амидирование анабазина

Реакция анабазина с натрий-амидом проводилась многократно в различных растворителях и при разных температурах. В зависимости от условий реакции выход аминоанабазина колебался, достигая в лучшем случае 30% теоретического. Наилучшие результаты были получены при применении растворителей, в которых легче растворимы натриевые производные аминов: вазелинового масла и, особенно, диметиланилина при температурах от 120 до 150°. Ниже 130° реакция сильно замедляется, выше 150° имеет место сильное осмоление. Приводим описание одного из опытов.

К 16.6 г анабазина было прибавлено 10.1 г натрий-амида, тщательно измельченного при смачивании с небольшим количеством диметиланилина, и 50 см³ свеже перегнанного диметиланилина. Смесь нагревалась на масляной бане сначала до 100°, причем уже при 70° наблюдалось выделение водорода, затем температура была медленно поднята до 150°. Выделявшийся газ собирался в мерный цилиндр. Водород вначале медленно выделялся: 150—220 см³ в час, затем несколько энергичнее: до 410 см³ в час, а под конец нагревания выделение водорода опять замедлилось, и, когда он перестал выделяться, нагревание было прекращено, на что потребовалось $11^1/_2$ часов. Всего выделилось 1908 см³ водорода (0°,760 мм), что составляет 83.1% теоретического количества.

Продукт реакции, представляющий темную густую массу, разлагался ледяной водой, при этом замечалось разогревание. Образовалось два слоя: нижний — водный и верхний — диметиланилиновый. Смесь извлекалась эфиром; отделенный водный слой насыщался поташем и несколько раз извлекался эфиром. При этом осталась нерастворимая в воде и эфире смола. Соединенные эфирные вытяжки были высушены прокаленным

поташем, эфир выпарен на водяной бане, а остаток расфракционирован в вакууме. При этом получены следующие фракции:

1. До 100° (при 7 мм). Содержит диметиланилин.

2. 174—186° (при 7 мм). Представляет собой вещество, быстро закристаллизовавшееся при охлаждении в приемнике.

3. 190—220° (с небольшим разложением). Вещество, также закристаллизовавшееся в приемнике. Главная часть его перегналась при 198—203°.

В колбе осталось небольшое количество неперегоняющейся без разложения смолы. Кристаллическая фракция 174—186° (при 7 мм), полученная в количестве 5.4 г, была очищена двукратной кристаллизацией из гептана. Чистые кристаллы плавились при 105—106°. Вещество легко растворимо в воде и спирте, растворимо в эфире и бензоле, кристаллизуется из гептана и толуола.

I. Навеска: 0.1101, получено: 0.2745 г CO_2 и 0.0848 H_2O
II. „ 0.1200 „ 0.2982 „ CO_2 и 0.0916 „
III. „ 0.1105 „ 22.72 см³ N (16.5°,761.3 мм)
IV. „ 0.0955 „ 19.2 „ N (13°,763.0 мм)

$C_{10}H_{15}N_3$ Вычислено: C — 67.80%; H — 8.47%; N — 23.73%

Найдено:	I „	68.00 „	8.56 „	—
„	II „	67.76 „	8.48 „	—
„	III „	— „	— „	23.83
„	IV „	— „	— „	23.74

Несомненно, что вещество это представляет собою один из возможных изомеров α-аминоанабазина.

Хлорплатинат аминоанабазина

К горячему раствору 0.161 г аминоанабазина в 1 см³ крепкой соляной кислоты прибавлен нагретый до кипения раствор 0.306 г хлорной платины в 3 см³ воды. При охлаждении выделились мелкие оранжевые кристаллы. Они были отсосаны, промыты слабой соляной кислотой и высушены в вакуум-эксикаторе. Кристаллы не содержат кристаллизационной воды и плавятся выше 225°.

1. Навеска: 0.1107 г, получено 0.0367 г Pt
2. „ 0.1046 г, „ 0.0347 г „

$C_{10}H_{15}N_3 \cdot H_2PtCl_6$ Вычислено: Pt — 33.22%

Найдено: „ 33.17
„ „ 33.18

При медленной кристаллизации из разбавленной соляной кислоты хлорплатинат выделяется в виде крупных красных кристаллов, содержащих кристаллизационную воду.

Пикрат аминоанабазина

К раствору 0.39 г аминоанабазина в 10 см³ спирта прибавляют при кипячении раствор 1.59 г пикриновой кислоты в 25 см³ спирта. Тотчас же выпал желтый мелко-кристаллический осадок. Раствор нагревался 20 минут на водяной бане и горячим был отфильтрован. Кристаллы промыты два раза теплым спиртом, затем эфиром и высушены в вакуум-эксикаторе. Плавится с разложением при 233—233.5°.

Пикрат весьма трудно растворим в воде и органических растворителях и кристаллизуется без воды.

I.	Навеска: 0.1370 г,	получено: 23.51 см³	N	(15°,763.7 мм)
II.	„ 0.1166 „	„ 19.88 „		(16°,761.5 „)
III.	„ 0.1379 „	„ 24.06 „		(16°,762,3 „)

$C_{10}H_{15}N_3 \cdot 2C_6H_2(NO_2)_3OH$ Вычислено: N — 19.84%

Найдено: I „ 20.08
„ II „ 19.82
„ III „ 20.10

Хлористоводородная соль аминоанабазина

В раствор 0.3 г чистого аминоанабазина в сухом бензоле пропускался ток хлористого водорода, при этом выпадает хлористоводородная соль аминоанабазина. Она была отфильтрована, отжата на фарфоровой тарелке и для очистки была растворена в абсолютном спирте и осаждена абсолютным эфиром; при этом выпадает масло быстро закристаллизовывающееся. Кристаллы отсасывались и высушивались в вакуум-эксикаторе. Плавится при 251.5—252.5°.

Лаборатория по исследованию и синтезу
растительных и животных веществ.
Москва.

Поступило
16 II 1934.

CHEMIE

AMIDIERUNG MIT HILFE VON NATRIUM- UND KALIUMAMID IN DER REIHE DER ALKALOIDE

I. ÜBER DAS α-AMINOANABASIN

Von M. KACNELSON und M. KABAČNIK

(*Vorgelegt von A. Favorskij, Mitglied der Akademie, d. 16. II. 1934*)

ZUSAMMENFASSUNG

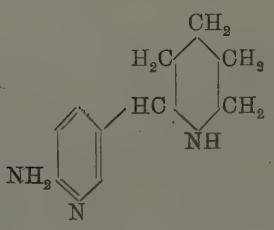
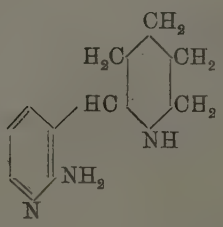
Die üblichen Verfahren zur Herstellung von Aminoderivaten sind in der Pyridinreihe und in der Reihe der Alkaloide wenig anwendbar.

Dank der von A. C. Čičibabin und O. Seide (1) entdeckten Reaktion waren die mit der Herstellung der Aminoderivate in der Pyridinreihe verbundenen

Schwierigkeiten behoben. Diese Reaktion wurde im weiteren von A. Čičibabin für den Fall des Nikotins nutzbar gemacht; das ergab ein erstes Beispiel von Anwendung der Reaktion der Amidierung des Pyridinkerns mit Hilfe von Natriumamid auf die natürlichen Alkaloide (2). Uns interessierte die Frage von der weiteren Anwendbarkeit dieser Reaktion auf andere Alkaloide, die Frage, inwieweit diese Reaktion unter den von A. Čičibabin eingehaltenen Bedindungen, im Gesamtbereich der Alkaloide allgemeine Gültigkeit beanspruchen darf. Die Lösung dieser Frage könnte zur Erzeugung einer Reihe von aminoderivierten Alkaloiden führen, wodurch eine Reihe neuer Verbindungen mit starker physiologischer Wirkung dem Gebrauche erschlossen werden könnten.

Wir begannen unsere Arbeit mit der Amidierung des Anabasins, welches ein Alkaloid der *Anabasis Aphylla L* darstellt. Die Arbeit mit diesem Alkaloid wurde möglich seit dem Erscheinen der Untersuchung von A. Orechov und G. Menschikov (3), in welcher die Structur dieses Alkaloids einwandfrei erwiesen und die Formel des Anabasins endgültig als α-Piperidyl-β-Pyridin aufgestellt ist. Unsere Untersuchung hat nachgewiesen, dass auch hier die Reaktion der Amidierung anwendbar ist.

Das Natriumamid wirkt auf das Anabasin in ähnlicher Weise wie auf Pyridin und Nikotin. Dabei scheidet sich Wasserstoff aus und das erhaltene Produkt bildet das Aminoanabasin. Hier ebenfalls, anderen Fällen analog, kann man der erhaltenen Base die Struktur eines α-Aminoanabasins zuschreiben, doch sind dabei zwei isomere α-substituierte Derivate möglich, da das Anabasin selber ein β-substituiertes Pyridin darstellt. Einstweilen bleibt noch unaufgeklärt, welche von den beiden Formeln der erhaltenen Substanz eigen ist:

I  oder II 

Von den zwei möglichen α-Anabasinen wählten wir das eine mit der Schmelztemperatur 105—106°, welches ein Pikrat ergab, dessen Schmelztemperatur 233—223.5° mit Zersetzung betrug. Die bei Bildung des Aminoanabasins sich absondernde höhere Fraktion wurde bisher einer weiteren Prüfung noch nicht unterzogen. Die Reaktion des Anabasins mit Natriumamid wurde mehrfach in verschiedenen Lösungsmitteln und bei verschiedenen Temperaturen herbeigeführt. Je nach den Bedingungen der Reaktion schwankte die Ausbeute des Aminoanabasins, wobei im besten Falle 30% der theoretischen erreicht wurden. Die allerbesten Resultate wurden bei Anwendung von Lösungsmitteln erreicht, in welchen die Natriumderivate der Amine leichter löslich sind: Vaselinöl und, besonders, Dimethylanilin bei Temperaturen von 120° bis 150°. Unter 130° wird die Reaktion stark

verzögert, über 150° hinaus findet eine starke Verharzung statt. Die Arbeit zur Untersuchung des Aminoanabasins und der Amidierung anderer Alkaloide wird fortgesetzt.

Laboratorium für Untersuchung und Synthese Pflanzlicher und Tierischer Stoffe. Moskau.

Eingegangen d. 16. II. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] А. Е. Чичибабин и О. А. Зейде. ЖРФХО, **44**, 1216 (1914); C., 1915, I, 1032 и 1064. A. Čičibabin und O. Seide. Journ. d. Russ. Ges. f. Phys. u. Chem., **44**, 1216 (1914); C., 1915, I, 1032 u. 1064.

[2] А. Е. Чичибабин. Исследования из области пиридиновых оснований. Москва, 1918, стр. 147. A. Čičibabin. Untersuchungen aus dem Gebiete der pyridinischen Basen. Moskau, 1918, S. 147.

[3] A. Orechoff u. G. Menschikoff. Ber., **64**, 266, 1931; Ber., **65**, 239, 1932.

ХИМИЯ

В. С. САДИКОВ, В. А. ВАДОВА и Р. Г. КРИСТАЛЛИНСКАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ СЕРНОЙ, СОЛЯНОЙ, ФОСФОРНОЙ И АЗОТНОЙ КИСЛОТ И ЩЕЛОЧЕЙ ПРИ КАТАЛИТИЧЕСКОМ РАСЩЕПЛЕНИИ БЕЛКОВ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 22 I 1934*)

Каталитическим расщеплением белковых веществ называется такого рода водное гидролитическое расщепление, которое совершается при участии лишь незначительных количеств расщепляющего реактива, кислоты, щелочи или карбоната в течение короткого времени при температуре свыше 120°, т. е. при повышенном давлении в автоклаве, и приводит к продуктам неполного расщепления белка, а именно преимущественно к циклопептидам. Обычно принятая характеристика протеинов при помощи количеств составляющих их аминокислот, имеет многие недостатки, обусловливаемые как химическими свойствами аминокислот, так и процессом их образования при гидролитическом распаде белка.

Имея в виду разработку новой системы анализа и исследования белков, базирующейся на циклопептидах, мы должны были прежде всего обратиться к количественному оформлению каталитического метода расщепления, предложенного ак. Н. Д. Зелинским и В. С. Садиковым. Поэтому, в первую очередь было поставлено задание изыскания оптимальных условий каталитического расщепления белка. Необходимо было выяснить значение природы расщепляющего агента (кислоты, щелочи, карбоната), его концентрации, продолжительности действия, температуры и давления. Оценка глубины воздействия указанных выше агентов на белок при определенном уровне температуры и давления в зависимости от данной

концентрации и данной продолжительности была основана на следующих показателях: 1) на количестве белка, переходящего в жидкую фазу катализата; определение плотного остатка и содержание азота в твердой и в жидкой фазах катализата; 2) на количестве веществ, извлекаемых эфиром; учет содержания общего азота и аминоазота в эфирной фракции; 3) на количестве веществ, извлекаемых хлороформом; учет содержания общего азота и аминоазота в хлороформной фракции; 4) на количестве веществ, извлекаемых амиловым или норбутиловым спиртом; учет содержания общего азота и аминоазота и амиловоалкогольной фракции; 5) на количестве веществ, не извлекаемых вышеуказанными растворителями; учет содержания общего азота и аминоазота в остаточной водной фракции.

В качестве белкового материала был взят альбумин куриного яйца, предварительно подвергнутый исчерпывающим экстракциям эфиром, ацетоном, хлороформом и метанолом.

Каталитическое расщепление производилось всегда при одних и тех же, точно определенных, условиях, а именно: в автоклаве Пфунгста при 180° (масляная баня) в течение 3 или 6 часов (опускание в нагретое масло и охлаждение на воздухе).

В качестве расщепляющих агентов были взяты: 1) кислоты серная, фосфорная и азотная, при концентрациях в 2 и в 4%; 2) углекислый натр — 2%; 3) едкий натр — 0.1%. Результаты произведенных опытов сопоставлены в табл. 1.

Таблица 1 — Tabelle 1

Действие серной кислоты при каталитическом расщеплении альбумина

Einwirkung von H_2SO_4 bei der katalytischen Spaltung des Eieralbumins

Концентрация H_2SO_4 в % Konzentration der H_2SO_4 in %	Продолжительность действия в часах Einwirkungsdauer in Stunden	Количество твердой фазы в % от белка Menge der festen Phase auf Eiweiss bezogen in %		Количество жидкой фазы в % от белка Menge der flüssigen Phase auf Eiweiss bezogen in %		Отношение аминоазота к общему азоту катализата в % Verhältnis zwischen Amino-Stickstoff und Gesamt-Stickstoff	Количество азота в катализате не определяемого по Слайку в % от общего азота Menge des mit Slyke unbestimmbaren Stickstoffs
		Плотный остаток Fester Rückstand in %	Содержание азота Stickstoff-Gehalt in %	Плотный остаток Fester Rückstand in %	Содержание азота Stickstoff-Gehalt in %		
2	3	23.17	18.5	76.83	81.50	25.4	74.6
2	3	14.50	11.6	85.50	88.40	26.9	73.1
4	3	10.98	8.1	89.02	91.9	—	—
4	3	10.05	6.5	89.95	93.5	33.8	66.2
2	6	17.90	12.9	82.10	87.1	17.0	83.0
2	6	17.05	13.6	82.95	86.40	26.0	74.0
4	6	10.67	6.2	89.33	93.8	34.2	65.8
4	6	10.20	6.2	89 80	93.5	37.2	62.8

Из табл. 1 видно, что при 3-часовом нагревании с 2% H_2SO_4 в раствор переходит от 76.8 до 85.5% овальбумина или от 81.5 до 88.4% азота альбумина. При этом количество аминоазота, определяемого по Ван-Слайку, составляет 25.4—26.9% от всего азота катализата, т. е. иными словами от 73.1 до 74.6% общего азота катализата (жидкой фазы) находится не в виде аминокислот, а либо в виде иминокислот (пролина или оксипролина) либо в виде циклопептидов.

При увеличении концентрации H_2SO_4 до 4% в катализат (жидкую фазу) переходит до 93.5% всего азота белка; количество аминоазота увеличивается до 33.8%, т. е. количество неаминокислотного снижается до 67.2%.

Увеличение продолжительности действия 2% H_2SO_4 с 3 до 6 часов вызывает небольшое уменьшение количества твердой фазы катализата и не увеличивает количества общего азота, переходящего в жидкую фазу катализата (93.8% вместо 93.5% в случае 3-часового нагревания). В случае 6-часового нагревания содержание аминоазота в жидкой фазе катализата увеличивается до 37% (вместо 34%), т. е., собственно говоря, весьма незначительно.

Содержание азота в твердой фазе вариирует от 6.84 до 11.5%; оно уменьшено до 8.84 и до 6.84% при концентрации H_2SO_4 в 4%. Продолжительность нагревания оказывает меньшее влияние на содержание азота в твердой фазе, чем концентрация кислоты. Твердую фазу нужно рассматривать как определенную фракцию катализата, а не часть неуспевшего измениться белка.

Действие кислот HCl, H_3PO_4 и HNO_3 на овальбумин при концентрации в 2% и продолжительности катализа в 6 часов рассмотрено в табл. 2.

Таблица 2 — Tabelle 2

Действие 2% минеральных кислот на овальбумин при 6-часовом катализе
Einwirkung von 2%-igen Mineralsäuren auf Eieralbumin bei 6-stündiger Katalyse

Минеральная кислота Mineralsäure	Количество твердой фазы в % Menge der festen Phase in %		Количество жидкой фазы в % Menge der flüssigen Phase in %		Отношение аминоазота к общему азоту катализата Verhältnis zwischen Amino-Stickstoff und Gesamt-Stickstoff in %	Количество азота, неопределяемого по Слайку Menge des mit Slyke unbestimmbaren Stickstoffs
	Плотный остаток Fester Rückstand in %	Содержание азота Stickstoff-Gehalt in %	Плотный остаток Fester Rückstand in %	Содержание азота Stickstoff-Gehalt in %		
HCl	13.50	10.3	86.50	89.7	17.08	82.92
HCl	9.86	6.5	90.14	93.5	27.80	72.20
H_3PO_4	23.10	19.0	76.90	81.0	28.69	71.31
H_3PO_4	13.60	10.2	86.40	89.8	34.54	65.46
HNO_3	12.62	9.0	87.38	91.0	23.90	76.10
H_2SO_4	17.90	12.9	82.10	87.1	17.02	82.98
H_2SO_4	17.05	13.6	82.95	86.4	26.05	73.95

Сравнивая между собою действие различных кислот на овальбумин при одинаковых концентрациях и продолжительности нагревания, мы не видим различия между H_2SO_4, HCl и HNO_3 по глубине расщепления, которая показуется величиною аминоазота. Фосфорная кислота, однако, дает большее процентное содержание аминоазота, чем серная, соляная и азотная; фосфорная кислота энергичнее расщепляет циклические связи.

Азотная кислота вызывает образование основных продуктов расщепления, которые нейтрализуют азотную кислоту и обусловливают появление щелочной реакции катализата.

Распределение азота между твердой и жидкой фазой катализата вариирует в широких пределах и не зависит от природы взятой кислоты. То же можно сказать и относительно содержания азота в твердой фазе, как это видно из табл. 3.

Таблица 3 — Tabelle 3

Содержание азота в твердой фазе катализата при 6-часовом нагревании

Stickstoff-Gehalt der festen Phase des Katalysats bei 6-stündiger Erhitzung

2% кислота Mineralsäure	Количество белка в г Eiweissmenge in g	Количество твердой фазы в г Menge der festen Phase in g	Количество азота в твердой фазе в г Stickstoff-Gehalt der festen Phase in g	Содержание азота в твердой фазе в % Stickstoff-Gehalt der festen Phase in %
HCl . . .	16.60	2.24	0.25	11.15
HCl . . .	16.93	1.67	0.15	9.0
H_2PO_4 . .	16.88	3.90	0.47	12.05
H_3PO_4 .	17.50	2.38	0.25	10.50
HNO_3 . .	18.52	2.34	0.22	9.4

Таблица 4 — Tabelle 4

Действие щелочей на овальбумин при 6-часовом катализе

Einwirkung der Alkalien auf Eieralbumin bei 6-stündiger Katalyse

Реагент Reagens	Концентрация реагента в % Konzentration in %	Количество твердой фазы в % Menge der festen Phase in %		Количество жидкой фазы в % Menge der flüssigen Phase in %		Отношение аминоазота к общему азоту Verhältnis zwischen Amino-Stickstoff und Gesamt-Stickstoff	Количество не аминоазота в % Menge des Nicht-Amino-Stickstoffs in %
		Плотное вещество Fester Rückstand in %	Содержание азота Stickstoff-Gehalt in %	Плотное вещество Fester Rückstand in %	Содержание азота Stickstoff-Gehalt in %		
Na_2CO_3 .	2	8.68	13.6	91.32	86.4	13.17	86.83
NaOH .	0.1	4.48	4.1	95.52	95.6	23.73	76.21
NaOH .	0.1	9.06	5.7	90.94	94.3	30.35	69.65

В табл. 4 приведены некоторые данные относительно действия щелочей при каталитическом расщеплении овальбумина в течение 6 часов.

При карбонатном катализе овальбумина в жидкую фазу катализата переходит 91.3% сухого вещества белка или 86.4% общего белкового азота. Твердая фаза составляет 8.7% сухого вещества белка или 13.6% от общего азота. Количество аминоазота в жидкой фазе равно 13.2%, т. е. 86.8% азота жидкой фазы находится в виде аминоазота или в виде циклопептидного азота. Под влиянием 0.1% NaHO белок дает твердую фазу в количестве 4.5—9.0% от сухого вещества, или соответственно 4.1—5.7% от общего белка. Количество аминоазота в жидкой фазе катализата однако сравнительно высокое, оно достигает 30.35% от всего азота жидкой фазы. Едкая щелочь действут более глубоко расщепляюще при концентрации в 0.1%, чем карбонат при концентрации в 2%.

В настоящее время выполняется особая работа по расщеплению кровяного альбумина 2% карбонатом калия и изучаются продукты карбонатного каталитического расщепления.

Лаборатория белковой химии
Института пищевой промышленности.
Ленинград.

Поступило
18 I 1934.

CHEMIE

ANWENDUNG VON H_2SO_4, HCl, H_3PO_4 HNO_3 UND VON ALKALIEN ZUR KATALYTISCHEN SPALTUNG DER EIWEISSKÖRPER

Von V. SADIKOV (SSADIKOW), V. VADOVA und R. KRISTALLINSKAJA

(*Vorgelegt von A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 22. I. 1934*)

ZUSAMMENFASSUNG

Im Laufe einer autoklaven Spaltung von Ovalbumin bei 180° und einer Dauer von 3 bezw. 6 Stunden mit 2% oder 4%-gen Lösungen von H_2SO_4, HCl, H_3PO_4, HNO_3 oder Na_2CO_3 geht etwa 81.5 bis 88.4% des gesamten Stickstoffs des Ovalbumins in Lösung über; dabei werden nur 25.4—29% Amino-Stickstoff gebildet, der grösste Teil der Spaltungsprodukte besteht also nicht aus Aminosäuren, sondern aus Zyklopeptiden.

Bei gleicher Konzentration und Einwirkungsdauer verhalten sich H_2SO_4, HCl und HNO_3 Ovalbumin gegenüber in Hinsicht der Spaltungstiefe ähnlich, nur H_3PO_4 scheint tiefere Spaltung zu bewirken. Im Falle von HNO_3 bilden sich basische Produkte, welche das Katalysat stark alkalisch machen.

Von besonderer Bedeutung ist die Karbonat-Katalyse der Eiweisstoffe, welche nur etwa 13% Amino-Stickstoff und eine geringe Menge anderer Spaltungsprodukte bildet. Bei katalytischer Spaltung des Ovalbumins mit Hilfe von 0.1% NaHO wird etwa 30.35% Amino-Stickstoff im Katalysat beobachtet.

Laboratorium für Eiweisschemie
des Instituts für Nahrungsmittel-Industrie.
Leningrad.

Eingegangen
d. 18. I. 1934.

И. Ф. ЛЯЩЕНКО

О ЦВЕТЕНИИ РОДА *CUCURBITA*

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 26 I 1934*)

Тыква относится к однодомным, но раздельнополым растениям с резко выраженными, даже по внешнему виду, мужскими и женскими цветами. У последних в отличие от арбуза и дыни полностью отсутствуют рудименты тычинок.

В качестве особенностей в цветении тыкв Н. Е. Житеневой в работе „Мировой сортимент культурных тыкв“ * указывается на очень частые случаи появления мужских цветов с рудиментами завязи у *C. moschata* var. *japonica*.

Cucurbita maxima. Обоеполый цветок — Zwitterblüte.

Нами, начиная с 1931 года, отмечен ряд случаев появления у разных видов тыкв некоторых очень интересных особенностей в строении их цветка. Так в 1931 г. на Ейской опытной станции среди коллекционных посевов образцов Всесоюзного института растениеводства на одном образце *C. moschata* var. *japonica* и другом *C. moschata* var. *indica* на некоторых растениях появились цветы, с нормально развитой завязью и по внешнему виду напоминавшие настоящий женский цветок, но с длинной цветоножкой, достигающей 10—15 см и похожей на цветоножку мужского цветка. Вместо рыльца, как это имеет место у нормальных женских цветов, имелась только хорошо развитая тычиночная колонка. Другие цветы, точно такие же по внешнему виду, по своему строению представляли обоеполый цветок, рыльце которого находилось в рудиментарном состоянии с желтой, а иногда и красной окраской. Сверху рыльца на двух основаниях сидит рассеченная снизу тычиночная колонка.

Такого рода цветы появлялись не только на растениях, где имелись обычные мужские и женские цветы, но были растения, где полностью отсутствовали нормально развитые мужские и женские цветы, а имелись только цветы с указанными выше отклонениями.

Плоды, полученные от таких цветов, были маленьких размеров и по весу варьировали от 90 до 2100 грамм.

По своему внутреннему строению они были очень разнообразны. Одни из них имели сплошь выполненный мякотью плод без всяких признаков не только семени, но и семенных гнезд, другие с признаками семенных гнезд, различных размеров от 1 до 5 и более сантиметров, третьи имели обычного типа семенное гнездо с крупно-волокнистой плацентой, но без семян, четвертые с небольшим семенным гнездом (одногнездные и двухгнездные), в котором имелись пустые семена.

* Труды по прикладной ботанике, генетике и селекции, т. XXIII, вып. 3, 1929—30.

Из 62 проанализированных плодов не оказалось ни одного плода с нормально развитыми семенами. В 1932 году на той же самой Ейской опытной станции подобного рода явления наблюдались не только у *C. moschata*, но и у *C. pepo* var. *citrulina* (голосемянная форма) и *C. turbaniformis*. У последних двух видов имели место обоеполые цветы с рудиментами рыльца. Плодов у них не образовалось.

В 1933 году в Ростовском-на-Дону ботаническом саду кроме уже перечисленных видов были наблюдаемы настоящие обоеполые цветы и у четвертого вида культурных тыкв *C. maxima* Афганского происхождения (см. фиг.). У растений этого вида тыкв цветы имели хорошо развитые завязь и рыльце, а вместо одной тычиночной колонки имелись три, имеющие вид лопастей, прилегающих к рыльцу с краев. Плодоножка у этих цветов типичная женская (толстая и короткая). У цветов такого устройства проходит неодновременное созревание рыльца и пыльников. Рыльце созревает на два дня раньше, чем пыльники. Проведенный Inzucht в прелелах такого цветка не дал ни одного плода. Неудачу склонны объяснять неодновременным созреванием рыльца и пыльников. Созревая на два дня позже рыльца, пыльники попадают на последнее тогда, когда оно уже неспособно должным образом реагировать на прорастание пыльцевых трубок. Нами было проведено тридцать опылений обоеполых цветков пыльцой нормальных мужских цветков этого же самого образца. Из тридцати опыленных цветков образовалось восемь плодов, из которых два были совершенно лишены семян, четыре имели пустые семена, и только два плода получились с полными семенами у одного в количестве десяти и у другого в количестве 13 штук.

Интересно отметить, что у растений, имевших обоеполые цветы, типичные женские цветы отсутствовали, а типичные мужские присутствовали.

Согласно закону гомологических рядов академика Н. И. Вавилова, обоеполые цветы должны быть и у пятого вида культурных тыкв *C. mixta* Pang.

Дальнейшие, более углубленные генетические исследования обещают быть весьма интересными и прольют свет на действительную природу отмеченных нами явлений в цветении рода *Cucurbita*.

Всесторонее изучение этого явления может иметь большое значение и для чисто практических селекционных целей.

Ботанический сад.
Ростов-на-Дону.

Поступило
26 I 1934.

PFLANZENPHYSIOLOGIE

ÜBER EIGENTÜMLICHE BLÜTENFORMBILDUNG BEI EINIGEN ARTEN DER GATTUNG *CUCURBITA*

Von I. LĬAŠČENKO

(*Vorgelegt von A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 26.I.1934*)

Die Kürbisse gehören zu den einhäusigen, aber getrenntgeschlechtlichen Pflanzen, die gleichzeitig Stempelblüten und Staubblüten tragen. Zum Unterschiede von den Stempelblüten der Melonen und Wassermelonen, fehlen den Stempelblüten der Kürbisse die rudimentären Staubblätter.

Als Fall von Eigenartigkeit im Blühen der Kürbisse hat N. Žiteneva in ihrer Arbeit „Das Weltassortiment der Kürbisse * sehr oft vorkommende Beispiele unnormaler Staubblüten bei *C. moschata* var. *japonica* mit einem rudimentären Fruchtknoten angegeben. Von 1931 an haben wir eine Reihe sehr interessanter Eigenartigkeiten in dem Bau der Blüte bei einigen Kürbissarten beobachtet. Im Jahre 1931 auf der Versuchsstation Jeisk hatten unter den Kollektionsaussaaten des Instituts für Pflanzenzucht d. USSR die Blüten einiger Pflanzen der Sorte *C. moschata* var. *japonica* und *C. moschata* var. *indica* einen normal ausgebildeten Fruchtknoten. Dem äusseren Aussehen nach waren diese Blüten normale Stempelblüten nur mit einem langen (10—15 cm) Blütenstiele, der gewöhnlich den Staubblüten entspricht. An der Stelle der Narbe, wie es bei normalausgebildeten Stempelblüten zu sein pflegt, war eine gut ausgebildete Staubfädensäule.

Andere Blüten, die dasselbe äusserliche Aussehen hatten, stellten in ihrem inneren Bau eine Zwitterblüte dar, deren gelb oder rotlich gefärbte Narbe in rudimentären Zustande war. Über der Narbeerhob sicheine von unten zerspaltene, auf zwei Unterlagen sitzende Staubsäule.

Solcher Art Blüten erschienen nicht nur auf Pflanzen, die daneben normalausgebildete Staub- und Stempelblüten tragen, sondern es kam eine ganze Reihe von Pflanzen vor, die nur Blüten mit den bezeichneten Anomalien trugen. Die Früchte, die man von solcher Art Blüten bekam, waren klein und im Gewicht variirten von 90—2100 g. Ihr innerer Bau war sehr verschieden. Einige von ihnen waren ganz ausgefüllt ohne jegliche Andeutung von Samen oder sogar von einen Hohlraum. Bei den anderen war der Hohlraum in verschiedenen Ausmassen von 1—5 cm Grösse schwach angedeutet. Die Dritten hatten einen Hohlraum gewöhnlicher Form, aber ohne Samen. Die Vierten hatten ein- und zweikammerige Hohlräume, die leere Samen enthielten. Unter 62 aufgeschnittenen Kürbissen konnte man keinen mit normalausgebildeten Samen finden.

Auf der Versuchsstation Jeisk im Jahre 1932 konnte man die normale Blütenformbildung nicht nur bei *C. moschata*, wie im Jahre 1931, sondern auch bei *C. pepo* var. *citrulina* (eine von Samenschalen freie Form) und *C. turbaniformis*, beobachten. Diese beiden Arten trugen Zwitterblüten mit rudimentären Narben. Früchte bildeten sie nicht. Im Jahre 1933 in botanischen Garten von Rostow am Don konnte man die unnormale Blütenformbildung ausser den bezeichneten Arten noch bei der aus Afghanistan stammenden *C. moschata* beobachten. Bei *C. moschata* hatten Blüten die normalausgebildete Fruchtknoten und Narbe. Aber an der Stelle einer Staubfadensäule, wie bei den normalen Blüten, waren drei lappenartige Bildungen, die dicht an die Narbe anlangen. Der Blütenstiel dieser Blüten hatte die typische Form die bei Stempelblüten üblich ist (dick und kurz). Die Reife der Staubblätter und des Stempels bei solcher Art Blüten treten nicht gleichzeitig ein.

Die Narbe reift zwei Tage früher als die Staubblätter. Die Inzuchtversuche innerhalb einer Blüte waren erfolglos, wofür die wahrscheinliche Ursache das ungleichzeitige Reifen von Stempel und Staubblättern war. Es wurden 30 solche Zwitterblüten mit dem Pollen der normalen Staubblüten bestäubt. Es entwickelten sich nur 8 Kürbisse, deren 2 vollständig samenlos waren, 4 leere Samen enthielten und 2 normale Samen in der Zahl von 10 und 13 Stück aufwiesen.

[1] Arbeiten zur angewandten Botanik, Genetik und Selektion, Bd. XXIII, H. 3, 1929—30.

Den Pflanzen, die solcher Art Zwitterblüten trugen, fehlten die normalen Stempelblüten, die normalen Staubblüten waren jedoch vorhanden.

Dem Gesetze der homologischen Reihen von N. Vavilov entsprechend, muss auch die fünfte Art der Kulturkürbisse, *C. mixta* Pang. Zwitterblüten bilden.

Die diesbezüglichen genetischen Untersuchungen werden weitergeführt.

Botanischer Garten.
Rostov am Don.

Eingegangen
d. 26.I.1934.

ЗООЛОГИЯ

Н. И. КАЛАБУХОВ

„АНАБИОЗ“ У ПОЗВОНОЧНЫХ И НАСЕКОМЫХ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ НИЖЕ 0°

К ВОПРОСУ О ПЕРЕОХЛАЖДЕНИИ И ЗАМОРАЖИВАНИИ ЖИВОТНЫХ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 13 I 1934*)

В 1898 г. Ф. Кодис [1] пришел к выводу о том, что животные и их отдельные органы и ткани, могут переживать при температуре ниже 0° лишь в состоянии переохлаждения. Изучение холодостойкости растений [2, 3] и насекомых [4, 5, 6, 7, 8, 9] показало, что холодостойкость определенных видов зависит от особенностей, препятствующих образованию льда в организме. Опыты переохлаждения и замораживания животных и растительных клеток [10] и одноклеточных организмов [11, 10] также показали, что замерзание жидкостей убивает клетку.

В противоположность этому П. И. Бахметьев [12, 13] утверждал, что насекомые и летучие мыши могут оживать после полного замерзания жидкостей в их теле.

Эти противоречия заставили нас изучить более детально явления, происходящие в организме животных при температуре ниже 0°.

МЕТОДИКА

Объектами исследования служили несколько видов животных.

A. Насекомые.

1. Пчелы. — *Apis mellifera* L. 2. Осы — *Vespula norvegica* L. 3. Шмели — *Bombus agrorum* F., *Psithurus rupestris* F. 4. Мучной жук — *Tenebrio molitor* L. (жуки и личинки).

B. Позвоночные.

5. Караси — *Carassius carassius* L. 6. Жабы — *Bufo bufo* L. 7. Черепахи — *Testudo horsfieldi* Gray. 8. Летучие мыши — *Nyctalus noctula* Schr. и *Myotis daubentoni* Kuhl. 9. Белые мыши — альбиносы *Mus musculus* L.

Охлаждение животных производилась в сосуде, помещенном в смесь снега с солью (NaCl), дававшую в зависимости от концентрации от—5° до—20°. В ряде опытов для поддержания постоянной температуры в течение длительного периода в качестве охлаждающих смесей применялись растворы других солей, дававшие эвтектические смеси с определенной температурой. [8, 14]

Измерение температуры тела производилось термоэлектрическим способом.

Термопары вводились позвоночным в прямую кишку, у насекомых температура тела определялась или введением термопары в thorax, или контактным способом по методике Robinson'a. (7)

Оживление животных производилось перенесением их из холодильника в температуру +2°—+4°, и затем (через 30—40 мин.) в температуру +15°—+18°.

Проведение этих опытов было обеспечено вниманием руководителей Лаборатории экологии В. В. Алпатова и Лаборатории физиологии И. Л. Кана. Опыты с рыбами были проведены совместно с Г. В. Никольским.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Было установлено, что при охлаждении ниже 0° возможны два пути образования льда в теле животных. В первом случае происходит предварительное переохлаждение животных до температуры от —2.9° до —7.45° (позвоночные) и даже до —17.1° (насекомые) и лишь затем начинается образование льда, сопровождаемое температурным скачком на 3—8° (см. табл. 1 и график, кривые 1—5). В других случаях лед образуется сразу после понижения температуры тела до температуры замерзания жидкостей (—0.5°—1.2°, см. табл. 2 и график, кривые 9 и 11). В том и другом случае после

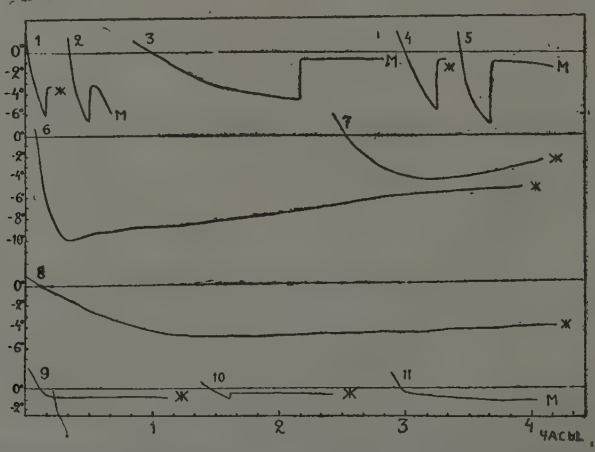


График. Изменение температуры тела животных при переохлаждении и замораживании. 1, 2, 3, 4, 5 — переохлаждение с последующим замерзанием; 6, 7, 8 — длительное переохлаждение; 9, 11 — замерзание без переохлаждения; 10 — замерзание после кратковременного и небольшого переохлаждения (1, 2 — осы; 3, 8 — черепахи; 4, 5, 7 — новорожденные летучие мыши; 11 — взрослая летучая мышь; 6 — личинка *Tenebrio*; 9 — жаба); ж — животное ожило, м — умерло.

Graph. Change of the temperature of the body at undercooling and freezing. 1, 2, 3, 4, 5 — undercooling with subsequent freezing; 6, 7, 8 — prolonged undercooling; 9, 11 — freezing without undercooling; 10 — freezing after an undercooling of short duration (1, 2 — wasps, 3, 8 — tortoises, 4, 5, 7 — newborn bats; 11 — adult bat; 6 — larva of *Tenebrio*; 9 — toad); ж — the animal revived, м — the animal died.

начала замерзания температура тела позвоночных держится на одном уровне продолжительное время (см. график, кривые 3, 5, 9, 10, 11 и табл.2). У насекомых, у которых замерзание начинается обычно после переохлаждения до температуры —30°—17.1°, температура тела после скачка снова падает (см. график, кривая 2 и табл. 1).

У карасей и жаб переохлаждение было получено лишь в ряде опытов, причем в этих случаях оно было незначительным (до температуры —0.9°—1.0° для жаб и до —5° для карасей) и кратковременным (4—7 минут, см. табл. 2). Черепахи переохлаждались в большинстве опытов (в 18 опытах из 22) до температуры —4°—5.4° (см. табл. 1 и 2 и график, кривые 3, 8, 10). Белые мыши переохлаждались во всех опытах (как взрослые, так и новорожденные) до температуры —3.75° —7.1° (табл. 1). У летучих мышей переохлаждение до —5° —7.45° было получено лишь у молодых летучих мышей (см. табл. 1 и график, кривые 4, 5 и 7). У взрослых *Nyctalus* и *Myotis* переохлаждения не происходило, кристаллизация льда начиналась сразу после понижения температуры тела до —0.5°—1.1° (табл. 2 и график, кривая 11).

Таблица 1 — Table 1

Оживание („анабиоз") животных после переохлаждения и последующего замерзания
Reviving ('anabiosis') of animals after undercooling and subsequent freezing

Вид — Species	Переохлаждение Undercooling					Замерзание после переохлаждения Freezing after undercooling				
	Число животных Number of animals	Минимальная t° тела (в разных опытах) Minimum t° of the body (in different experiments)	Продолжительность пребывания при t° ниже 0° (в минутах) Time during which the animal was at a t° below 0° (in minutes)	Ожило Revived	Умерло Died	Число животных Number of animals	Минимальная t° тела (в разных опытах) Minimum t° of the body (in different experiments)	Продолжительность пребывания при t° ниже 0° (в минутах) Time during which the animal was at a t° below 0° (in minutes)	Ожило Revived	Умерло Died
1 *Nyctalus noctula* Schr. (возраст 1—10 дн. — age 1—10 days)	8	—2.9 — 5.9	5 — 15	8	—	10	—0.5 — 1.5	1—10	3	7
	2	—4.2 — 5.7	45 — 93	2	—	4	—0.9 — 1.4	13—30	—	4
	1	—3.7	122	—	1	1	—4.1	52	—	1
2. *Mus musculus* L.	4	—3.7 — 5.7	8 — 15	—	4	1	—0.9	55	—	1
	4	—4.8 — 7.1	16 — 47	—	4	—	—	—	—	—
3. *Testudo horsfieldi* Gray	8	—2.6 — 4.5	25 — 90	8	—	8	—0.8 — 1.4	5—10	1	2
	6	—2.7 — 5.8	200 — 485	6	—	4	—0.5 — 0.7	30—95	—	4
	1	—4.75	1475	1	—	1	—8.2	337	—	1
4. *Vespula norvegica* L.	4	—0.6 — 3.9	8 — 30	4	—	9	—1.2—9.55	2—15	—	9
	3	—3.2 — 4.2	35 — 95	3	—	—	—	—	—	—
	4	—2.5 — 3.6	150 — 330	4	—	—	—	—	—	—
5. *Tenebrio molitor* L (личинки — larvae)	8	—8.2—17.1	13 — 83	8	—	9	—7.6—15.0	1—14	—	9
	31	—7.5—13	225 — 465	31	—	—	—	—	—	—
	12	—3.0—11	1320—2880	12	—	—	—	—	—	—

Эти данные говорят о том, что переохлаждение жидкостей в организме зависит от определенных условий. Кодис ([15]) первый указал, что „каждое животное может замерзать при всякой температуре ниже точки его замерзания“ (стр. 148). Максимов ([2]), Knight ([4]), Robinson ([6, 7]), Chambers and Hale ([10]) также отмечают непостоянство точки переохлаждения у растений, насекомых и отдельных клеток. П. И. Бахметьев, работая

Таблица 2 — Table 2

Оживание после замерзания без переохлаждения (или после кратковременного переохлаждения на 0.2—0.5°)

Reviving after freezing without undercooling (or after an undercooling of short duration)

Вид — Species	Число животных Number of animals	Минимальная t° тела (в разных опытах) Minimum t° of the body (in different experiments)	Продолжительность пребывания при t° ниже 0° (в минутах) Time during which the animal was at a t° below 0° (in minutes)	Ожило Revived	Умерло Died
1. *Nyctalus noctula* Schr. . . . (летучие мыши, крупный вид, взрослые)	4	—0.8 — 1.9	12 — 60	4	—
	4	—1.2 — 5.5	67—145	—	4
2. *Myotis daubentoni* Kuhl. . . (летучие мыши, мелкий вид, взрослые)	2	—0.9 — 1.6	17 — 30′	1	1
	3	—1.1 — 1.5	42 — 90′	—	4
3. *Testudo horsfieldi* Gray . . . (черепахи)	2	—0.5 — 0.7	50 — 70	2	—
	2	—0.6 — 0.7	100—190	2	—
4. *Bufo bufo* L. . . . . (жабы)	2	—0.5 — 0.6	20 — 25	2	—
	3	—0.6 — 0.75	55—145	3	—
	4	—0.65—5.75	165—302	1	3
5. *Carassius carassius* L. . . . (караси)	8	—0.5 — 0.2	1 — 27	8	—
	2	—2.05—4.9	217—305	—	2

с насекомыми, которые всегда подвергаются переохлаждению, распространил свои выводы о постоянстве „критической точки“ и на других животных в частности на летучих мышей, хотя по его данным у этих зверьков переохлаждение в ряде случаев происходило всего на 0.2° ([13]).

Возможность переохлаждения и образования льда тем или иным путем не случайна, как это предполагал Кодис ([15]) и зависит от физиологических особенностей животных, определяемых их видовыми, возрастными и сезонными отличиями и от условий охлаждения.

Большое значение имеют моменты влияющие на теплоотдачу (соотношение между массой и поверхностью тела животных, наличие покровов замедляющих проведение тепла — мех, жировой слой; интенсивность и скорость охлаждения — температура воздуха) и на образование льда

(содержание свободной и связанной воды, сахара, белка, солей и жира в жидкостях и теле животных, степень пористости и влажности кожи, размеры сосудов, по которым циркулируют жидкости, и степень подвижности этих жидкостей в связи с сокращениями сердца).

Подробный анализ этих условий будет дан в отдельной статье.

Исходя из этих закономерностей, мы провели ряд опытов длительного переохлаждения насекомых и позвоночных без замораживания. В этих опытах температура холодильника поддерживалась несколько более высокой, чем та температура тела, при которой у данной группы животных обычно происходит „скачок".

Прекращая этим дальнейшую отдачу тепла, удалось поддерживать состояние переохлаждения у летучих мышей до 2 часов, у черепах до 24 часов, у насекомых от 5 (осы, шмели) и до 30—48 часов (пчелы, личинки *Tenebrio*). Часть этих данных приведена на табл. 1 и на графике, кривые 6, 7 и 8. Следовательно, состояние переохлаждения жидкостей в теле животных может наблюдаться долгое время.

Выясняя, возможно ли оживание животных после переохлаждения и замораживания, мы установили следующие закономерности (см. табл. 1 и 2).

1. Большинство изученных объектов (летучие мыши, черепахи, пчелы, шмели, осы, личинки жуков) могут оживать после пребывания их в состоянии переохлаждения от 1.5 (летучие мыши) до 24 (черепахи) и 30—48 часов (насекомые) при температуре их тела от — 2.9° до — 17.1°.

2. Образование льда в теле животных после предварительного переохлаждения обычно уже через несколько минут после скачка вызывает их смерть (табл. 1).

3. При частичном замораживании животных без предварительного переохлаждения возможно их оживление (см. табл. 2 и график, кривые 9 и 11). Точно также возможно оживление животных при частичном замерзании после небольшого и кратковременного переохлаждения (см. график, кривая 10 и табл. 2).

4. Оживание животных после полного замерзания невозможно.

Различие в возможности оживания при замерзании без переохлаждения и с предварительным переохлаждением объясняется тем, что в первом случае образование льда идет постепенно с периферии тела животного (взрослые летучие мыши, черепахи, жабы, рыбы). При замораживании после переохлаждения, кристаллизация льда происходит быстро и одновременно во всех частях тела, разрушая ткани ряда органов, в частности легких. Вскрытие молодых летучих мышей через различные промежутки времени после „скачка" показало, что кровоизлияние в легких (служащее показателем образования льда) появляется через 5—10 минут после скачка, а через 20—30 минут все легкие окрашиваются в темно-красный цвет.

Эти данные опровергают ошибочный взгляд Бахметьева ([12, 13]) о возможности оживания животных после полного замерзания и подтверждают материал, собранный ранее по изучению холодостойкости и переохлаждения животных (Кодис, Knight, Robinson, Сахаров, Chambers and Hale, Лозина-Лозинский). Иногда наблюдалась гибель животных даже в состоянии переохлаждения. Данные о гибели пчел при длительном переохлаждении ([14]), смерть в состоянии переохлаждения летучей мыши № 31 (табл. 1) и некоторые другие данные говорят о том, что в этих случаях животные могут погибать вследствие нарушения физиологических взаимоотношений между отдельными частями организма (см. данные о всасывании и сжигании глюкозы у пчел при низкой температуре ([14]).

В заключение было необходимым выяснить, прекращаются ли в состоянии переохлаждения или частичного замерзания жизненные процессы, т. е. является ли последующее оживление „анабиозом" в точном смысле этого слова. Было определено поглощение кислорода (у личинок *Tenebrio molitor* L.) и сжигание резерва глюкозы (меда) в теле пчел в состоянии переохлаждения.

Эти данные позволяют утверждать, что в этом состоянии при температуре —3°—10° в теле животных происходит обмен; личинки *Tenebrio* потребляли (при температуре от —7.5° до —10°) от 0.0026 до 0.0041 см³ кислорода (объем приведен к +15° на 1 личинку в 1 час) пчелы при температуре —3° сжигали по 0.038 глюкозы (на 1 пчелу в час). Обмен очень замедлен (например, личинки *Tenebrio* поглощают при +15° от 0.0240 до 0.0300 см³ O_2 в 1 час на 1 личинку), но тем не менее, он происходит, и, следовательно, в состоянии длительного переохлаждения мы наблюдаем лишь глубокое оцепенение животных, а не полное прекращение жизненных процессов.

Лаборатория экологии
Института зоологии МГУ.
Москва.

Поступило
13 I 1934.

ZOOLOGY

'ANABIOSIS' IN VERTEBRATES AND INSECTS AT A TEMPERATURE BELOW ZERO

ON UNDERCOOLING AND FREEZING OF ANIMALS

By N. KALABUCHOV

(Communicated by A. Richter, Member of the Academy, 13. I. 1934)

It has been established in experiments with insects (bees, wasps, bumble-bees, beetles, and their larvae) and vertebrates (bats, white mice, tortoises, toads, and fishes) that when they are cooled below 0°, ice can form in the body of animals in two ways. In the first case, a preliminary undercooling of the animals down to a temperature of from —2. 9° to —7.45° (vertebrates) and even to —17.10° (insects) takes place, and ice begins to form only afterwards, freezing being accompanied by a sudden 'leap' of the temperature up to —0.5°—1.9° (see table 1 and the graph, curves 1—5). In other cases, ice forms at once after the temperature of the body has fallen to the freezing point of liquids (—0.5°—1.2°, see table 2 and the graph, curves 9 and 11). Both in the first and in the second instances, the temperature of the body of vertebrates remains for a long time at the same level after freezing has set in (see table 2 and the graph, curves 3, 5, 9, 10, 11). With insects where freezing usually sets in after undercooling to a temperature of —3.0° to —17.1°, the temperature after the 'leap' falls again (see the graph, curve 2 and table 1). Undercooling of crucians and toads was effected only in some experiments, and in these cases it was rather inconsiderable (—0.9° to —1.0° for toads and to —5° for crucians) and of short duration (4—7 minutes, see table 2). Tortoises became undercooled in the majority of experiments (18 out of 22 experiments) to —4°—5.4° (see table 1 and 2 and the graph, curves 3, 8, 10). White mice became undercooled in all the experiments (adult as well as newborn) —3.75°—7.1° (table 1). As regards bats an undercooling of —5°—7.45° was obtained only with young bats (see table 1 and the graph, curve 11).

These data show that the the undercooling of liquids in the organism depends upon definite conditions. Kodis [15] was the first to point out that 'every animal can freeze at any temperature below its freezing point' (p. 148). Maximov [2], Knight [4], Robinson [6, 7], Chambers and Hale [10] also note that in plants, insects, and separate cells the undercooling point is an inconstant one. P. Bachmetjev, working with insects, always showing an undercooling, extended his deductions as to the constancy of 'the critical point' to other animals, namely to bats, although, according to his data, with these small animals undercooling in a number of cases took place only at 0.2°. [13]

The possibility of an undercooling and of ice formation in one way or another is not accidental as Kodis [15] supposed it to be, but depends upon the physiological characteristics of the animals, determined by their age, specific and seasonal differences, and upon the conditions of their cooling.

The circumstances influencing the emission of heat are of great importance (the correlation of the mass to the surface of the body in animals, the existence of coverings impeding the conduction of heat; for instance, fur and layers of fat; the intensity and the rate of cooling, i. e. the temperature of the air), and so are also those influencing the formation of ice (water, sugar, albumen, salt, and fat content of the liquids and in the body of animals, the degree of porosity and skin moisture, the size of the internal vessels through which the liquids circulate, and the degree of the mobility of these liquids in connection with the systole).

A detailed analysis of these conditions will be given in a separate article.

Taking these existing laws as an initial point, we carried out a series of experiments of a prolonged undercooling without freezing of insects and vertebrates. In these experiments the temperature maintained in the refrigerator was somewhat higher than the temperature of the body at which, in a given group of animals, the 'leap' usually takes place. Preventing any further emission of heat, the author succeeded in keepinp up a state of undercooling for as long as 2 hours in bats, 24 hours in tortoises, from 5 to 48 hours in insects (wasps, bumble-bees 5 h., bees, larvae of *Tenebrio* 30—48 h.). A part of these data is given in table 1 and the graph, curves 6, 7, and 8). Consequently, a state of undercooling of the liquids in the body of animals can exist for a long time.

The elucidation of the question whether animals can revive after undercooling or congelation, enabled us to establish the following laws (see table 1 and 2).

1. The majority of the studied animals (bats, tortoises, bees, bumble-bees, wasps, larvae of beetles) can revive after remaining in a state of undercooling from 1.5 hours (bats) to 24 (tortoises) and 48 (insects), the temperature of their body being from —2.9° to —17.1°.

2. The formation of ice in the body of animals after a preliminary undercooling usually causes their death several minutes after the temperature 'leap' (table 1).

3. After a partial freezing of the animals without any preliminary undercooling, their reviving is possible (see table 2 and the graph, curves 9 and 11). Likewise animals can revive after a partial freezing following a slight undercooling of short duration (see the graph, curve 10 and table 2).

4. Animals cannot revive after complete freezing.

The possibilities for an animal to revive when there has been simply a freezing and when freezing has succeeded undercooling are different.

The difference can be explained thus. In the first case, ice begins to form in the body of the animal gradually extending from the periphery to the centre (bats, tortoises, toads, fishes). When freezing comes after undercooling, ice cristallizes rapidly and simultaneously in all the parts of the body, destroying tissues in many organs, for instance in the lungs. The dissection of bats at different intervals of time after the 'leap', has shown that the haemorrhage in the lungs (which serves as an indicator of the formation of ice), appears already in 5 to 10 minutes after the leap, and in 20—30 minutes the entire lungs acquire a dark red colour. These data refute Bachmetjev's ([12], [13]) mistaken opinion to the effect that animals can revive after complete freezing and confirm the data collected earlier, concerning the study of the capacity to withstand cold and of undercooling (Kodis, Maximov, Knight, Payne, Robinson, Sacharov). The causes of Bachmetjev's mistake, who determined incorrectly the percentage of frozen liquids in the body of insects at different temperatures, have already been recorded earlier, particularly by Sacharov ([8]), who determined the percentage of water freezing in the body of insects by means of a dilatometer.

Finally, we had to ascertain whether the vital processes cease in a state of undercooling or partial freezing, i. e. whether the reviving which follows represents an 'anabiosis' in the strict sense of the term. We determined the consumption of oxygen (in larvae of *Tenebrio*) and that of the glucose reserve (honey) in the body of bees in a state of undercooling.

On the ground of these data it can be asserted that in this state, at temperatures —3°—10° a metabolic exchange takes place in the body of animals. Larvae of *Tenebrio* consumed (at from —7.5° to —10°) from 0.0026 to 0.0041 cm^3 of oxygen (the volume is reduced to +15° per 1 larva in 1 hour); bees at —3° consumed 0.038 mg of glucose (one bee in 1 hour). The exchange is very slow (for instance the larvae of *Tenebrio* consume at +15° from 0.0240 to 0.0300 cm^3 of O_2), but nevertheless it takes place, and, consequently, the state of a prolonged undercooling is only a profound torpor of the animals and not a complete cessation of the vital processes.

Laboratory of Oecology of
the Institute of Zoology of the Moscow University.

Received
13. I 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Kodis. Zentralbl. f. Physiologie, B. 12, 1898.
[2] Н. Максимов. Изв. Лесн. института, СПб., 1913.
[3] А. Рихтер. Журн. оп. агрон. Юго-Востока, т. IV, 1927.
[4] H. Knight. 19th Report State Entomologist of Minnesota, 1922.
[5] N. Payne. J. Morph. and Phys., vol. 43, 1927.
[6] W. Robinson. Techn. Bull. Univ. of Minnesota, № 4, 1926.
[7] W. Robinson. J. Agric. Research, vol. 37, 1928.
[8] Н. Сахаров. Журн. оп. агрон. Юго-Востока, т. VI, 1928.
[9] Л. Лозина-Лозинский. Сборник ВИЗР, № 7, 1933.
[10] R. Chambers and H. Hale. Proc. R. Soc., Ser. B, vol. 110, 1932.
[11] Ефимов. Арх. Русск. протист. о-ва, т. I, 1922.
[12] P. Bachmetjew. Experimentelle entomologische Studien. B. I, Leipzig, 1901, B. II, Sophia, 1907.
[13] П. Бахметьев. Природа, № 4, 1912.
[14] Н. Калабухов. Зоологич. журнал, т. 12, № 4, 1933.
[15] Ф. Кодис. Изв. Ак. Наук, т. XVII, № 3, 1902.

ГЕОЛОГИЯ

Л. А. ВАРДАНЯНЦ

О ВОЗРАСТЕ РЕЛЬЕФА ПРЕДКАВКАЗЬЯ

(*Представлено академиком А. А. Борисяком 17 II 1934*)

В пределах Предкавказья наибольший интерес в геоморфологическом отношении представляет долина р. Калаус, врезанная на глубину до 200 м в широко развитую в этой области пенепленоподобную поверхность.

Н. В. Думитрашко и Л. Г. Каманин насчитывают в долине Калауса две поймы и кроме того шесть террас. Самая верхняя, шестая терраса совпадает морфологически с верхним плато, составляющим часть указанной выше пенепленоподобной поверхности. В качестве „предварительного рабочего построения" авторы синхронизируют верхнее плато (шестую террасу) с гюнцем, пятую террасу — с минделем, четвертую — с риссом и т. д. Такое построение основано на сопоставлении высоты террас Калауса с высотой террас Кубани, где к гюнцу Г. Ф. Мирчинк и А. Л. Рейнгард отнесли верхнюю террасу, возвышающуюся над поймой Кубани на 200 м. Уже ранее я указал, что нет оснований считать 200-метровую террасу р. Кубани действительно гюнцской. Подобное сопоставление вполне условно, и, следовательно, в такой же мере условна также и та стратография, которая предложена для террас Калауса.

В течение последних нескольких лет опубликован ряд схем, авторы которых приравнивают гюнц к низам апшерона, миндель — к низам баку и т. д. Такие схемы дают для речных террас более определенное стратиграфическое положение, но тем самым в еще большей степени оттеняют условность понятия о Кавказском гюнце, минделе, риссе и т. д. Основываясь на подобной синхронизации, мы получим для верхней, шестой террасы Калауса возраст не древнее миндель-рисса, между тем эта терраса признается, как указано выше, синхроничной гюнцу.

По отношению к геологическому строению Предкавказья я обращу внимание на следующие факты.

1. В районе Прикумска по данным С. А. Гатуева значительные площади покрыты суглинками, имеющими мощность в десятки метров. Эти суглинки, залегая с небольшим наклоном к востоку, перекрывают несогласно морские отложения апшерона, акчагыла, сармата и т. д. Детальность описаний не оставляет сомнений, что в этом районе после апшерона имели место поднятие и размыв, закончившиеся формированием пенеплена, на котором отложились суглинки. Вполне ясно, что поверхность пенепленизации, срезавшая апшеронские и более древние отложения, должна быть синхронична (в нижнем пределе ее возраста) предбакинской орогенической фазе, а суглинки — бакинской трансгрессии.

2. В области Терского и Сунженского хребтов по материалам М. Ф. Двали и К. А. Прокопова такие же в общем суглинки лежат несогласно на сильно дислоцированном апшероне. И в этом случае поверхность размыва, срезавшая дислоцированный апшерон, близка к пенеплену. Следовательно и здесь нужно признать, что в нижнем пределе возраста пенепленизация, предшествовавшая отложению суглинков, синхронична предбакинской орогенической фазе, а суглинки — бакинской трансгресии.

3. В районе Армавира по данным В. П. Колесникова мы имеем так называемую армавирскую свиту континентальных отложений, перекрывающую трансгрессивно понт и сармат, в силу чего нижний предел возраста этой свиты определяется не ниже акчагыла. Но здесь акчагыл должен быть представлен не континентальными, а морскими отложениями, так как именно через этот район должен был протягиваться к древнему Черному морю пролив Акчагыльского моря, установленный С. А. Гатуевым в районе Минеральных вод. Поэтому акчагыльский возраст армавирской свиты нужно считать исключенным, и таковая, надо полагать, не древнее апшерона.

На размытую поверхность армавирской свиты налегают галечниковые отложения. Еще выше залегают мощные суглинки, покрывающие несогласно как галечники, так и нижележащую армавирскую свиту. Очевидно, что армавирская свита и суглинки разделены перерывом, обусловленным орогеническими движениями, которые имеют их нижним пределом предбакинскую орогеническую фазу. Следовательно, и здесь суглинки повидимому не древнее бакинской трансгрессии. Не лишено интереса, что и здесь поверхность размыва, предшествовавшего отложению суглинков, близка по ее характеру к равнине.

Таким образом, в разных местах Предкавказья мы имеем одинаковую последовательность однотипных процессов. Сначала размыв, синхроничный, в нижнем пределе, предбакинской орогенической фазе. Размыв этот заканчивается пенепленизацией, после чего происходит накопление суглинков, которые покрыли мощной мантией значительную часть Предкавказья. Надо думать, что во всех указанных районах пенепленизация соответствует одному и тому же моменту, т. е., в общем смысле, началу баку.

Материалы С. А. Гатуева и В. П. Колесникова не оставляют сомнений, что этот пенеплен существовал и в районе современной долины Калауса и что остатками этого именно пенеплена нужно считать верхнее плато, окружающее долину Калауса. Следовательно, во время нижне-бакинской пенепленизации, а также и во время последующего накопления суглинков, т. е. во время бакинской трансгрессии, долина Калауса еще не существовала вовсе. Если же правилен предполагаемый некоторыми авторами синхронизм минделя с началом баку, то значит в конце минделя, т. е. в миндель-риссе, долина Калауса еще не существовала. В этих условиях начальный момент формирования долины Калауса не древнее рисса, и, следовательно, здесь в современном рельефе не может быть никаких элементов гюнцского рельефа.

Геоморфология Предкавказья показывает, что после отложения суглинков, т.-е. после баку, здесь имело место интенсивное расчленение рельефа, так как в ряде мест новые речные долины прорезали не только суглинки, но и подстилающие их более древние отложения. Такую картину мы наблюдаем в самой долине р. Калаус, к западу и к востоку от нее в долине р. Кумы, в области Терского и Сунженского хребтов и т. д. Наиболее интенсивно это проявилось в пределах удлиненной области, протягивающейся от окрестностей ст. Кавказской через Ставрополье к р. Куме.

Такое расчленение рельефа было обусловлено изменившимся, в силу тектонических движений, соотношением речного стока и базиса эрозии, т. е. в конечном счете поднятием местности, и вполне понятно, что возраст этих поднятий определяется в нижнем его пределе послебакинской орогенической фазой. Этими же движениями обусловлено залегание

суглинков в виде антиклиналей по р. Куме (А. Л. Рейнгард) и в области Терского и Сунженского хребтов (М. Ф. Двали, К. А. Прокопов), в виде синклиналей в районе Армавира (В. П. Колесников) и Прохладной (А. Л. Рейнгард) и т. д. Расчленение рельефа происходило не в один прием, а в несколько, т. е. ступеньчато. В связи с этим в долинах сформировались террасы, а так как поднятие и соответственно этому и эрозия с каждой новой ступенью ослабевали, то и высота уступов террас последовательно уменьшается.

Террасы Калуса по их числу и по пропорциональности высот их уступов хорошо соответствуют террассам горной области Кавказа, где, как я отмечал уже ранее, самая верхняя терраса представляет, по существу, остатки поверхности выравнивания, широко развитой по всему Большому Кавказу. Мы еще не имеем полных доказательств, но более чем вероятно, что именно эта поверхность выравнивания области Большого Кавказа была источником того материала, который внизу, у подножий горной системы, накоплялся ввиде суглинков. В таком случае эта поверхность выравнивания области Большого Кавказа должна быть, подобно мантии суглинков Предкавказья, синхроничной бакинской трансгрессии.

Таким образом, мы имеем в настоящее время полную возможность определять достаточно точно стратиграфическое положение террас долины Калауса и других долин Предкавказья. Эти террасы можно обозначать, например, как бакинское плато, как первую послебакинскую террасу и т. д. Такая стратиграфия речных террас будет базироваться на конкретной основе региональной стратиграфии Кавказа, и тем самым становится лишним стратифицирование терасс по гюнцу, минделю, риссу и т. д., которые для Кавказа являются пока еще не более, чем отвлеченными понятиями.

Из предыдущего вполне ясно, что современный рельеф Предкавказья определился в связи с поднятиями и расчленением рельефа, имевшими место после бакинской трансгрессии. Следовательно, он был создан только в постплиоцене, точнее — в верхней его половине, т. е. в общем на глазах первобытного человека.

Сейсмологический институт
Академии Наук.
Ленинград.

Поступило
17 II 1934.

GEOLOGY

ON THE AGE OF THE RELIEF OF THE CISCAUCASIA

BY L. VARDANIANC

(*Communicated by A. Borissiak, Member of the Academy, 17. II. 1934*)

Within the boundaries of the Ciscaucasia the valley of the Kalaus river, cutting to the depth of 200 m the widely developed peneplain-shaped surface, is of the greatest interest in geomorphological respect.

N. Dumitraško and L. Kamanin establish for the Kalaus valley six terraces. The upper thereof, the sixth, morphologically coincides with the upper plateau which constitutes part of the above-mentioned peneplain-shaped surface. As a 'preliminary working hypothesis', the authors synchronize the upper plateau (the sixth terrace) with Günz, the fifth ter-

race with Mindel, the fourth with Riss, etc. Such a scheme is based upon the comparison of the terrace height in the Kalaus valley with that in the valley of the Kuban, where the upper terrace rising 200 m above the Kuban river is referred by G. Mirčink and A. Reinhard to Günz. I have already pointed out that there are no grounds for assuming that the 200 m high terrace of the Kuban really belongs to Günz. Such a comparison is quite conventional, which is in the same measure true of the stratigraphy proposed for the Kalaus valley.

During a few last years several schemes have been published of which the authors refer Günz to lower Apsheron, Mindel to lower Baku, etc. Such schemes reserve to river terraces a more definite stratigraphic position, which renders the conception of the Caucasian Günz, Mindel, Riss, etc. still more conventional. On the basis of such a synchronization, we obtain for the upper, sixth, terrace the age no older than Mindel-Riss, whereas this terrace is held to be synchronous to Günz, as has been pointed out above.

With regard to the geological constitution of the Ciscaucasia I wish to call attention to the following evidence.

1. In the Prikumsk region, according to S. Gatujev, considerable areas are covered with loams up to tens of metres thick. These loams, gently dipping eeast, uncomformably overlie the marine deposits of the Apsheronian, Akchaghylian, Sarmatian, etc. A detailed geological description leaves no room for doubt that in the region in question the Apsheronian was followed by upheaval and denudation, which led to the formation of a peneplain upon which the loams were deposited. It is evident that the surface of peneplainization which cut off the Apsheronian and older deposits must be synchronous (in the lower parts of its age) with the pre-Bakinian orogenic phase, and the loams are contemporary to the Bakinian transgression.

2. In the region of Terek and Sunja mountain chains, according to M. Dvali and C. Prokopov, similar loams overlie uncomformably the strongly dislocated Apsheronian. In thies case also, the denudation surface which cut off the dislocated Apsheronian is nearly peneplain-shaped. It must consequently be recognized that in the lower part of the age, the peneplainization, previous to the deposition of lonms, is synchronous with the pre Bakinian orogenic phase, and loams with the Bakinian transgression.

3. In the Armavir region, according to V. Kolesnikov, we observe the so-salled Armavir series of continental deposits transgressively overlying the Pontian and Sarmatian. Therefore, the lower limit of the age of the series in question is not lower than Akchaghylian. On the other hand, the Akchaghylian in this area must be represented not by continental but by marine deposits, since this area coincides with the strait of the Akchaghylian sea as established by S. Gatujev in the region of Mineralny Vody, which stretched through this area towards the ancient Black Sea. The Akchaghylian age of the Armavir series is therefore excluded, the latter being no older than Apsheronian.

The denudation surface of the Armavir series is overlain by pebble-stone deposits. They are followed upwards by powerful beds of loam uncomformably overlying the pebble-stones as well as the underlying Armavir series. It is evident that the latter are separated from loams by an interval caused by orogenic movements of which the earliest limit is the pre-Bakinian orogenic phase. Therefore, here the loams also appear to

be no older than the Bakinian transgression. It is of some interest that the surface of denudation antecedent to the deposition of loams is similar in its character to a plain.

Thus, at dif.erent places of the Ciscaucasia we observe the same succession of kindred processes. At the beginning, denudation synchronous, at the lower limit, to the pre-Bakinian orogenic phase. The denudation ends wilh peneplainization, then follows the accumulation of loams which formed a powerful cover overlying a considerable area of the Ciscaucasia. In all these areas, peneplainization appears to correspond to one and the same moment, i. e., generally speaking, to the beginning of the Bakinian.

To judge from the evidence collected by S. Gatujev and V. Kolesnikov, it appears doubtless that this peneplain existed also in the area of the Kalaus valley of the present day and the upper plateau surrounding the Kalaus valley must be considered the residuals of this peneplain. Thus, at the time of lower-Bakinian peneplainization, as well as during the succeeding accumulation of loams, i. e. during the Bakinian transgression, the Kalaus valley did not exist at all. But if the synchronism of Mindel with the Bakinian is correct, as avdanced by some authors, the Kalaus valley did not exist at the end of Mindel, i. e. in Mindel-Riss. Under such conditions, the initial moment of the formation of the Kalaus valley is no older than Riss, and, therefore, the actual relief can contain no elements of Günz.

The geomorphology of the Ciscaucasia shows that after the deposition of loams, i. e. after the Bakinian, a considerable dissection of the relief took place, since a series of new valleys cut not only the loams, but also the underlying older deposits. This is to be observed in the Kalaus valley, east and west of it, in the Kuma valley, in the region of Terek and Sunja mountains, etc., and particularly within the elongated area stretching from the station Kavkasskaya neighbourhood over Stavropol to the Kuma.

Such dissection of the relief is due to changes in correlation between fluvial drain and erosion basis, as a consequence of tectonic movements, in other words, to an upheaval of the area. Hence it is evident that the age of such upheavals is determined at ist lower limit by the post-Bakinian orogenic phase. The same movements have caused the disposition of loams in the form of anticlines along the Kuma river (A. Reinhard) and in the region of Terek and Sunja mountains (M. Dvali, C. Prokopov), in the form of synclines in the region of Armavir (V. Kolesnikov) and Prokhladnaya (A. Reinhard), etc. The dissection of the reiief took place gradually, stepwise. In connection with it, terraces were formed in valleys, whereas upheavals and corresponding erosion weakened with every step, the difference of heights of terraces thus gradually decreasing.

The terraces of the Kalaus valley according to their number and proportional heights are in good conformity with those of the mountain region of the Caucasus, where, as I have pointed out, uppermost terrace is practically a residual of levelling surface widely developed over the whole of the Main Caucasus. We possess so far no complete proofs, though it is more than probable that material which accumulated at the foot of the mountain system in the form of loams owes its origin precisely to the above-mentioned levelling surface of the Main Caucasus. In such a case, the levelling surface of the Main Caucasus region must be, like the loam mantle of the Ciscaucasia, synchronous with the Bakinian transgression.

We are, therefore, quite able to determine with sufficient accuracy the stratigraphic position of terraces of the Kalaus valley and of other valleys of the Ciscaucasia, and these terraces may be designated, for example, as Bakinian plateau, as the first post-Bakinian terrace, as the second post-Bakinian terrace, etc. Such a stratigraphy of river terraces will be based upon concrete regional stratigraphy of the Caucasus, and thus it will become useless to stratify them as Günz, Mindel, Riss, etc., which so far appear with regard to the Caucasus but abstract notions.

It is evident from the above that the actual relief of the Ciscaucasia formed in connexion with the upheaval and dissection of the relief which took place after the Bakinian transgression. Therefore, the whole of the actual relief of the Ciscaucasia formed in Post-Pliocene only, more exactly in its upper half, i. e. in the presence of Man.

Seismological Institute of the
Academy of Sciences.
Leningrad.

Received
17. II. 1934.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА

НА

„ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР“

(НОВАЯ СЕРИЯ)

с 1 января 1934 г. по 1 января 1935 г.

на год (36 выпусков) цена ..... **54 руб.**

на полгода (18 выпусков) цена .. **27 руб.**

«ДОКЛАДЫ» выходят ежедекадно (1, 11 и 21 каждого мес.)

Подписку и деньги направлять Сектору распространения Издательства Академии Наук Ленинград 53, В. О., Тучкова наб., 2, или сдавать доверенным, снабженным специальными удостоверениями

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

1 марта 1934 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редакционная коллегия: академик А. А. Борисяк
академик С. И. Вавилов
академик А. А. Рихтер

Ответственный редактор академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Редактор издания И. М. Эйзен. — Технический редактор М. И. Стеблин-Каменский

Сдано в набор 19 февраля 1934 г. — Подписано к печати 28 февраля 1934 г.

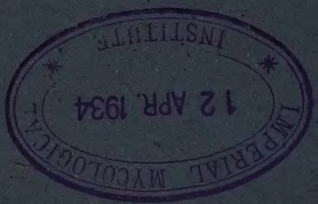
72 стр. (861—432)

Формат бум. 72 × 110 см. — 1½ печ. л. — 51 840 печ. зн. в л. Тираж 3000 + 175

Ленгорлит № 3958. — АНИ № 85. — Заказ № 2578

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

Цена 2 руб. 25 коп.



КОМПЛЕКТЫ

ИЗДАНИЯ

„ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР“

(НОВАЯ СЕРИЯ)

за 1933 год

Шесть выпусков — 20 печ. листов

Цена 9 руб.